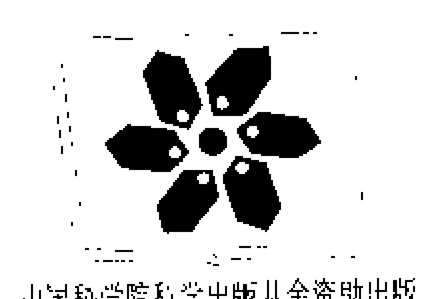


中国科学院科学出版基金资助出版

# 有限典型群子空间轨道生成的格

万哲先　霍元极 著

科 学 出 版 社

1997

# 内 容 简 介

本书介绍有限典型群在格论和组合计数公式上的应用．主要讨论了有限域上典型群作用下，由子空间轨道生成的格，并给出所述格的特征多项式．全书用矩阵方法进行讨论和推导，所得到的结果比较完整，它不仅丰富了典型群和组合计数公式的内容，而且对典型群在其他学科中的应用作了一次尝试．

本书适合于高校数学系高年级师生、研究生和数学工作者阅读．

**图书在版编目（CIP）数据**

有限典型群子空间轨道生成的格/万哲先，霍元极著．北京：科学出版社，1997

ISBN 7-03-005627-2

Ⅰ．有…　Ⅱ．①万…　②霍…　Ⅲ．有限群：典型群-子空间-轨道-格　Ⅳ．O153.1

中国版本图书馆CIP数据核字（96）第19732号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1997年6月第　版　　开本：850×1168　1/32

1997年6月第　次印刷　　印张：9 3/8

印数：1—1 000　　字数：244 000

定价：18.50元

# 序　言

我国典型群的研究，是华罗庚教授在本世纪40年代开创的，特点是在几何背景的指导下，用矩阵方法研究典型群，它在典型群的结构和自同构的研究中很有成效，在本世纪中叶取得了丰硕的成果，受到国际同行们的重视．把以华罗庚为代表的典型群研究群体誉为典型群的"中国学派"．当时的研究成果多数汇集在《典型群》(华罗庚、万哲先著，1963，上海科技出版社)这部专著中．

后来，典型群的研究领域逐步扩大，万哲先与他的学生和合作者们对有限域上典型群几何学的理论和应用作了深入的研究，其应用所涉及的内容有：结合方案和区组设计、认证码、射影码和子空间轨道生成的格等．关于有限域上典型群几何学理论方面的成果汇集在《有限域上典型群的几何学》(《Geometry of Classical Groups over Finite Fields》，万哲先著，1993，Chatwell-Bratt，United Kingdom)这部专著中．关于它对结合方案和区组设计的应用见《有限几何与不完全区组设计的一些研究》(万哲先，戴宗铎、冯绪宁、阳本傅著，1966，科学出版社)这部专著．另一些应用方面的成果散见近几年国内外有关的专业刊物．

本书讨论在有限域上的各种典型群作用下，由各个轨道或相同维数和秩的子空间生成的格．当然，在一般线性群、辛群和酉群作用下，上述两种类型的格是一致的；而在正交群或伪辛群的作用下就需对这两种类型的格分别进行讨论．在同类型的格中，首先研究不同格之间的包含关系；其次对给定的格中子空间的特性进行刻画；最后讨论所述格的几何性和计算它的特征多项式．为了使本书的内容在阐述上系统完整，便于读者阅读，我们在第一章中介绍了格、几何格和特征多项式的一些基础知识，而在第二章到第

十章中，按典型群的通常顺序介绍了各种典型群和子空间几何格的有关内容．全书是用矩阵方法进行讨论和推导的．我们认为这样处理比较具体直观，便于读者学习参考．

本书是我们和我们的合作者陈冬生、刘迎胜在这一领域中研究成果的系统介绍．其中大部分已在国内或国际的学术刊物上发表，也有一部分在国内或国际的一些学术会议上作过报告，受到同行们的关注．本书是在国家自然科学基金的资助下完成的．刘嘉善编审对本书的出版给予大力支持，在此一并致谢．

万哲先　霍元极

1995 年 8 月

# 目　　录

# 第一章　偏序集和格的一些知识

在本章里，要介绍阅读本书所需要的有关偏序集和格的一些预备知识，特别是局部有限偏序集上的Möbius函数和Möbius反演公式，偏序集上的特征多项式，几何格等．欲知偏序集及格的详细内容，可参见[1]和[3]．

## §1.1　偏序集

**定义1.1**　设$P$是一个非空集，$\geqslant$是定义在$P$上的一个二元关系．如果下列三条公理P01—P03成立，$P$就叫做一个**偏序集**，$\geqslant$叫做$P$上的**偏序**，简称**序**．

P01 对于任意$x\in P$，都有$x\geqslant x$．

P02 对于任意$x$，$y\in P$，如果$x\geqslant y$，而且$y\geqslant x$，那么$x=y$．

P03 对于任意$x$、$y$、$z\in P$，如果$x\geqslant y$，而且$y\geqslant z$，那么$x\geqslant z$．

除了上述三条公理外，下列公理P04也成立，$P$就叫做一个**全序集**或**链**，而$\geqslant$叫做$P$上的**全序**．偏序$\geqslant$有时也记作$\leqslant$．

P04 对于任意$x$，$y\in P$，$x\geqslant y$，$y\geqslant x$二者中至少有一个成立．

设$P$是偏序集，$\geqslant$是$P$上的一个偏序．如果$x\geqslant y$(或$x\leqslant y$)而$x\neq y$，就记$x>y$(或$x<y$)．

**例1.1**　设$S$是一个集合，而$\mathscr{P}(S)$是$S$的幂集，即$\mathscr{P}(S)$是由$S$的所有子集组成的集合，对于$A$，$B\in\mathscr{P}(S)$，如果$A\supset B$，就规定$A\geqslant B$，那么$\mathscr{P}(S)$是偏序集．

当$S$是无限集时，令$\mathscr{P}_f(S)$是由$S$的所有有限子集组成的集合．对于$A$，$B\in\mathscr{P}_f(S)$，如果$A\supset B$，仍规定$A\geqslant B$，那么$\mathscr{P}_f(S)$也是偏序集．　□

**例1.2**　设$\mathbb{N}$是全体正整数组成的集合，$\geqslant$是通常的不小于

关系，那么$N$是一个全序集. □

**例1.3** 设$V$是域$F$上的一个向量空间，维数可以有限也可以无限. 令$\mathscr{L}(V)$是$V$的所有子空间组成的集合. 对于$V$的子空间$U$和$W$，如果$U \supseteq W$，就规定$U \geqslant W$，那么$\mathscr{L}(V)$是偏序集.

当$\dim V=\infty$时，令$\mathscr{L}_f(V)$是由$V$的所有有限维子空间组成的集合，对于$U, W \in \mathscr{L}_f(V)$，如果$U \supseteq W$，仍规定$U \geqslant W$，那么$\mathscr{L}_f(V)$也是偏序集. □

设$T$是偏序集$P$的一个子集，$m \in T$. 如果不存在$x \in T$，使得$m<x$($m>x$)，$m$就叫做$T$的**极大元**（或**极小元**）. 如果对所有的$x \in T$，都有$m \geqslant x$($m \leqslant x$)，$m$就叫做$T$的**最大元**（或**最小元**）. 显然，当$P$有最大元（或最小元）时，它必是$T$的唯一的极大元（或极小元）. 往往把$P$的唯一的最大元（或最小元）记作1（或0）.

例如，在例1.1中，$S$和空集$\phi$分别是$\mathscr{P}(S)$的最大元和最小元. 当$S$是无限时，$\phi$仍是$\mathscr{P}_f(S)$的最小元，但$\mathscr{P}_f(S)$无最大元. 例1.3中，$V$和仅由零向量0组成的子空间$\{0\}$分别是$\mathscr{L}(V)$的最大元和最小元. 当$\dim V=\infty$时，$\{0\}$仍是$\mathscr{L}_f(V)$的最小元，但$\mathscr{L}_f(V)$无最大元.

设$T$是偏序集$P$的一个子集，$u \in P$. 如果对所有$x \in T$都有$u \geqslant x$(或$u \leqslant x$)，$u$就叫做$T$的一个**上界**(或**下界**). 注意$T$的上界(下界)不一定属于$T$. 如果$u$是$T$的一个上界，而对于$T$的任一个上界$v$，都有$v \geqslant u$，那么$u$就叫做$T$的**上确界**. 同样可定义$T$的**下确界**. 根据P02，如果$T$有上确界(或下确界)，则它必是唯一的，并把它记作$\operatorname{Sup}T$(或$\operatorname{Inf}T$). 同样，$T$的上确界(或下确界)，也不一定属子$T$.

例如，在例1.2中，令$T=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，那么$\operatorname{Sup}T=10$，$\operatorname{Inf}T=1$.

设$P$是偏序集，$x, y \in P$，$x \leqslant y$，定义

$$[x,y]=\{z \in P \mid x \leqslant z \leqslant y\}.$$

并把$[x,y]$叫做**以**$x$**和**$y$**为端点的区间**，**简称区间**.

例如，在例1.1中，设$S=\{1,2,\cdots,10\}$，$x=\{1,2\}$，$y=\{1,2,3,4\}$，则$[x,y]=\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$.

设$P$是偏序集，$x$，$y\in P$，$x<y$. 如果不存在$z\in P$，使得$x<z<y$，就说$y$是$x$的一个**覆盖**，记作$x<\cdot y$.

例如，在例1.1中，仍设$S=\{1,2,\cdots,10\}$，那么$\{1,2,3\}<\cdot\{1,2,3,5\}$.

**定义1.2** 设$P$是偏序集，$P'$是$P$的一个非空子集. 显然，$P'$对于$P$的偏序来说也是偏序集，叫做$P$的**子偏序集**.

设$P$是偏序集，$x$，$y\in P$，而$x\leqslant y$. 那么以$x$和$y$为端点的区间是$P$的子偏序集.

一个链（即全序集）所含的元素个数有限时称为**有限链**，否则称为**无限链**.

如果一个偏序集$P$的子偏序集$S$是一个链，就称$S$**是$P$中的一个链**.

设$P$是偏序集，$x$，$y\in P$，$x<y$. 如果存在$x_0=x$，$x_1$，…，$x_n=y$，使得

$$x=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=y, \qquad (1.1)$$

就把链(1.1)叫做以$x$为**起点**，$y$为**终点**的链，简称$x$，$y$链，而$n$叫做它的**长**. 如果$x_i<\cdot x_{i+1}$，链(1.1)就叫做$x$，$y$**极大链**. 如果

$$x=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_n'=y, \qquad (1.2)$$

也是以$x$为起点，$y$为终点的链，而每个$x_i(1\leqslant i\leqslant n)$都在(1.2)中出现，(1.2)就叫做(1.1)的**加细**. 假定以$x$为起点，$y$为终点的链都可加细成极大链，而以$x$为起点，$y$为终点的极大链的长的最大值存在，就把它记作$d(x,y)$. 显然$d(x,x)=0$. 如果有以$x$为起点$y$为终点的链不能加细成极大链，或以$x$为起点$y$为终点的诸极大链的长没有最大值，就定义$d(x,y)=\infty$. 如果以$x$为起点，$y$为终点的链都可以加细成极大链，而以$x$为起点，$y$为终点的极大链的长都相等，就令$l(x,y)=d(x,y)$，并把它叫做从$x$到$y$的**长**.

**定义1.3** 偏序集 $P$ 说成是满足 Jordan-Dedkind 条件，简称 JD 条件，如果对于任意 $a$，$b\in P$，$a<b$，以 $a$ 为起点，$b$ 为终点的所有极大链有相同的有限长.

例如，在例1.1中，对于 $A$，$B\in\mathscr{P}(S)$，$A\subset B$，所有 $A,B$ 极大链的长是 $|B|-|A|$，而在例1.3中，对于 $U,W\in\mathscr{L}_f(V)$，$U\subset W$，所有 $U,W$ 极大链的长是 $\dim W-\dim U$. 所以偏序集 $\mathscr{P}(S)$ 和 $\mathscr{L}_f(V)$ 均满足 JD 条件.

**定义1.4** 设 $P$ 和 $P'$ 都是偏序集，$P$ 中的偏序记作 $\leqslant$，而 $P'$ 中的偏序记作 $\leqslant'$. 假定 $f$：$P\to P'$ 是个双射. 如果对于任意 $x$，$y\in P$，$x\leqslant y$ 当且仅当 $f(x)\leqslant' f(y)$，那么 $f$ 就叫做 $P$ 到 $P'$ 的一个**同构映射**. 而 $P$ 和 $P'$ 称为**同构**，记作 $P\cong P'$.

例如，在例1.1中，设 $A,B,A',B'\in\mathscr{P}_f(S)$，$A\leqslant B$，$A'\leqslant B'$，而 $|B|-|A|=|B'|-|A'|$. 那么区间 $[A,B]$ 和 $[A',B']$ 作为子偏序集同构. 在例1.3中，设 $U,W,U',W'\in\mathscr{L}_f(V)$，$U\leqslant W$，$U'\leqslant W'$，而 $\dim W-\dim U=\dim W'-\dim U'$. 那么区间 $[U,W]$ 和 $[U',W']$ 作为子偏序集同构，而且它们又都和 $\mathscr{L}(W/U)$ 同构.

## §1.2 局部有限偏序集上的 Möbius 函数

**定义1.5** 设 $P$ 是偏序集. 如果对任意 $x$，$y\in P$，$x<y$，区间 $[x,y]$ 都是有限集，那么 $P$ 就叫做**局部有限偏序集**. 如果 $P$ 是有限集，$P$ 就叫做**有限偏序集**.

易知，有限偏序集是局部有限偏序集. 例如，当 $S$ 是有限集时，$\mathscr{P}(S)$ 是有限偏序集；设 $q$ 是素数幂，而 $V$ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限维向量空间时，$\mathscr{L}(V)$ 也是有限偏序集，因此它们都是局部有限偏序集. 当 $S$ 是无限时，因为区间 $[\phi,S]$ 是无限集，所以 $\mathscr{P}(S)$ 不是局部有限偏序集，但 $\mathscr{P}_f(S)$ 是局部有限偏序集. 同样，当 $V$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的无限维向量空间时，$\mathscr{L}(V)$ 不是局部有限偏序集，而 $\mathscr{L}_f(V)$ 是局部有限偏序集.

**定义1.6** 设 $P$ 是局部有限偏序集，$R$ 是有单位元的交换环.

设 $\mu(x,y)$是定义在 $P$ 上而在 $R$ 中取值的二元函数. 假定 $\mu(x,y)$ 满足以下三个条件:

(i) 对于任意 $x\in P$，总有 $\mu(x,x)=1$;

(ii) 对于 $x$、$y\in P$，如果 $x\not\leqslant y$，则 $\mu(x,y)=0$;

(iii) 对于 $x$，$y\in P$，如果 $x<y$，则 $\sum\limits_{x\leqslant z<y}\mu(x,z)=0$,就把 $\mu(x,y)$叫做 $P$ 上的 Möbius **函数**.

**命题1.1** 设 $\mu(x,y)$是局部有限偏序集 $P$ 上的 Möbius 函数,那么 $\mu(x,y)$也适合以下条件:

(iv) 对于 $x,y\in P$, 如果 $x<y$, 那么 $\sum\limits_{x<z\leqslant y}\mu(z,y)=0$. 反过来，如果函数 $\mu(x,y)$满足(i),(ii),(iv),那么 $\mu(x,y)$也满足条件(iii).

**证明** 设 $x$、$y\in P$，$x\leqslant y$. 因 $P$ 局部有限，所以，$[x,y]$是有限集. 设$|[x,y]|=n$. 那么可将$[x,y]$中的元素排成

$$x_1=x,x_2,\cdots,x_n=y,$$

使得 $x_i<x_j$ 蕴涵 $i<j$. 定义

$$a_{ij}=\mu(x_i,x_j),\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

再定义

$$b_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果 } x_i\leqslant x_j,\\0,\text{如果 } x_i\not\leqslant x_j.\end{cases}$$

那么

$$A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ 和 } B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

都是 $R$ 上的 $n\times n$ 矩阵. 由于条件(i),(ii),(iii),我们有

$$AB=I,$$

其中 $I$ 是 $n\times n$ 单位矩阵. 根据矩阵论，我们也有

$$BA=I,$$

而这个式子就给出条件(iv).

又因为从 $BA=I$ 可推出 $AB=I$,所以本命题的第二个断言也成立. □

下面的引理是显然的.

**引理1.2** 设 $P$ 是局部有限偏序集. 对于 $x$, $y\in P$, 如果 $x<y$, 那么 $d(x,y)<\infty$. □

**命题1.3** 局部有限偏序集上一定有 Möbius 函数, 而且是唯一的.

**证明** 设 $P$ 是局部有限偏序集. 先证明 $P$ 上一定有 Möbius 函数. 我们定义

$$\mu(x,x)=1,\quad \text{对任意 } x\in P,$$
$$\mu(x,y)=0,\quad \text{如果 } x,y\in P, x\not\leqslant y.$$

设 $x$, $y\in P$, 而 $x\leqslant y$. 对 $d(x,y)$ 作归纳来定义 $\mu(x,y)$. 当 $d(x,y)=0$时, $x=y$, 上面已定义了 $\mu(x,x)=1$. 设 $d(x,y)>0$. 对 $z\in P$, 而 $x\leqslant z<y$, 显然有 $d(x,z)<d(x,y)$, 因此, $d(x,z)$ 已定义, 于是定义

$$\mu(x,y)=-\sum_{x\leqslant z<y}\mu(x,z).$$

根据 $\mu(x,y)$的定义方法, 它适合(i), (ii), (iii). 因此 $\mu(x,y)$是 $P$ 上的 Möbius 函数.

再设 $\mu'(x,y)$也是 $P$ 上的一个 Möbius 函数, 由(i), 对于任意 $x\in P$, 有 $\mu'(x,x)=1$. 因此

$$\mu'(x,x)=\mu(x,x)=1,\quad \text{对任意 } x\in P.$$

设 $x$、$y\in P$. 如果 $x\not\leqslant y$, 根据(ii), 有 $\mu'(x,y)=0$. 因此

$$\mu'(x,y)=\mu(x,y)=0,\quad \text{若 } x\not\leqslant y.$$

再设 $x\leqslant y$. 对 $d(x,y)$施行数学归纳法来证明 $\mu'(x,y)=\mu(x,y)$. 当 $d(x,y)=0$时, $x=y$, 已证 $\mu'(x,x)=1=\mu(x,x)$. 设 $d(x,y)>0$. 对于 $z\in P$, 而 $x\leqslant z<y$, 显然 $d(x,z)<d(x,y)$. 根据归纳假设, $\mu'(x,z)=\mu(x,z)$. 于是

$$\begin{aligned}\mu'(x,y)&=-\sum_{x\leqslant z<y}\mu'(x,z)\quad (\text{由 } \mu'(x,y) \text{ 适合条件(iii)})\\&=-\sum_{x\leqslant z<y}\mu(x,y)\quad (\text{根据归纳假设})\\&=\mu(x,y).\quad (\text{因为 } \mu(x,y) \text{ 适合条件(iii)})\end{aligned}$$ □

**例1.1(续)** 设 $S$ 是一个集合. 再设 $x,y\in\mathscr{P}_f(S)$, 即 $x$, $y$ 是

$S$ 的有限子集，定义

$$\mu(x,y)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \not\leqslant y,\\ (-1)^{|y|-|x|}, & \text{如果 } x\leqslant y.\end{cases} \tag{1.3}$$

易证 $\mu(x,y)$ 就是 $\mathscr{P}_f(S)$ 上的 Möbius 函数. □

## §1.3 局部有限偏序集上的 Möbius 反演公式

**命题1.4** 设 $P$ 是有最小元0的局部有限偏序集，$R$ 是有单位元的交换环. 再设 $\mu(x,y)$ 是 $P$ 上而在 $R$ 中取值的 Möbius 函数，$f(x)$ 是定义在 $P$ 上而在 $R$ 中取值的函数. 对于任意 $x\in P$，令

$$g(x)=\sum_{y\leqslant x}f(y). \tag{1.4}$$

那么

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x}g(y)\mu(y,x). \tag{1.5}$$

反之，设 $g(x)$ 是定义在 $P$ 上而在 $R$ 中取值的函数. 对于任意 $x\in P$，按(1.5)式来定义 $f(x)$，则(1.4)式成立.

**证明** 因为 $P$ 是有最小元0的局部有限偏序集，所以区间$[0,x]$是有限集. 于是(1.4)式中的和是有限和. 因此(1.4)式来定义的 $g(x)$ 是合理的. 同样，(1.5)式中的和也是有限和，而

$$\begin{aligned}\sum_{y\leqslant x}g(y)\mu(y,x)&=\sum_{y\leqslant x}\Big(\sum_{z\leqslant y}f(z)\Big)\mu(y,x) && \text{（将(1.4)代入）}\\ &=\sum_{z\leqslant x}f(z)\sum_{z\leqslant y\leqslant x}\mu(y,x) && \text{（交换求和次序）}\\ &=\sum_{z\leqslant x}f(z)\delta_{z,x} && \text{（根据条件(iv)）}\\ &=f(x),\end{aligned}$$

其中 $\delta_{z,x}$ 是 Delta 函数.

反之，

$$\begin{aligned}\sum_{y\leqslant x}f(y)&=\sum_{y\leqslant x}\Big(\sum_{z\leqslant y}g(z)\mu(z,y)\Big) && \text{（将(1.5)式代入）}\\ &=\sum_{z\leqslant x}g(z)\sum_{z\leqslant y\leqslant x}\mu(z,y) && \text{（交换求和次序）}\end{aligned}$$

$$= \sum_{z\leq x} g(z)\delta_{z,x} \qquad \text{(根据条件(iii))}$$

$$= g(x).$$ □

(1.5)式称为(1.4)式的 Möbius **反演公式**.

平行地又有

**命题1.5** 设 $P$ 是有最大元1的局部有限偏序集，$R$ 是有单位元的交换环. 再设 $\mu(x,y)$ 是 $P$ 上的在 $R$ 中取值的 Möbius 函数. $f(x)$ 是定义在 $P$ 上而在 $R$ 中取值的函数. 对于任意 $x\in P$，令

$$g(x) = \sum_{x\leq y} f(y). \tag{1.6}$$

那么

$$f(x) = \sum_{x\leq y} g(y)\mu(x,y). \tag{1.7}$$

反之，设 $g(x)$ 是定义在 $P$ 上而在 $R$ 中取值的函数，对于任意 $x\in P$，按(1.7)式来定义 $f(x)$，那么(1.6)式成立. □

## §1.4 Gauss 系数和 Gauss 多项式

设$\mathbb{F}_q$ 是 $q$ 个元素的有限域，$q$ 是一个素数幂，而 $n$ 是一个非负整数. 令

$$\mathbb{F}_q^{(n)} = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}_q, i = 1,2,\cdots,n\},$$

并把$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 叫做$\mathbb{F}_q$ 上的 $n$ 维行向量，规定 $n$ 维行向量的加法和纯量乘法如下：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) + (y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$= (x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$
$$x(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (xx_1,xx_2,\cdots,xx_n), x \in \mathbb{F}_q.$$

那么$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 是$\mathbb{F}_q$ 上的 $n$ 维向量空间，称为 **$n$ 维行向量空间**.

**命题1.6** 设$\mathbb{F}_q$ 是 $q$ 元有限域，$q$ 是一个素数幂. 再设 $n$ 和 $m$ 都是非负整数，$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 是$\mathbb{F}_q$ 上的 $n$ 维行向量空间. 那么$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中 $m$ 维子空间的个数恰好是

$$\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-m+1}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}. \tag{1.8}$$

**证明** 当 $m=0$ 时，$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 有唯一的一个0维子空间，它由零向量 $0=(0,0,\cdots,0)$ 组成. 这时约定(1.8)式等于1. 于是该命题在 $m=0$ 时成立.

现在设 $m>0$. 当 $n<m$ 时，$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 没有 $m$ 维子空间，即 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的 $m$ 维子空间的个数等于零. 另一方面

$$\begin{aligned}&(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-(m-1)})\\&\quad=(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)(1-q^0)(1-q^{-1})\\&\qquad\cdots(1-q^{n-(m-1)})=0.\end{aligned}$$

因此命题1.6在 $n<m$ 时也成立.

最后考察 $n\geqslant m$ 的情形. 设 $V$ 是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的任一 $m$ 维子空间，而 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是 $V$ 的一个基. $v_1$ 可以是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中任一非零向量，而 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 一共有 $q^n$ 个向量，因此 $v_1$ 一共有 $q^n-1$ 种可能的选择. 当 $v_1$ 选定后，$v_2$ 可以是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中任一与 $v_1$ 线性无关的向量，而与 $v_1$ 线性相关的向量一共有 $q$ 个，因此 $v_2$ 一共有 $q^n-q$ 种可能的选择. 如此继续下去，当 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}$ 选定后，$v_m$ 可以是任一与 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}$ 线性无关的向量. 由 $v_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 的选取可知 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}$ 线性无关. 那么与 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}$ 线性相关的向量一共有 $q^{m-1}$ 个. 因此 $v_m$ 共有 $q^n-q^{m-1}$ 种可能的选择. 这样 $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 一共有 $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{m-1})$ 种可能的选择. 但是一个确定的 $m$ 维子空间可以有不同的基. 根据上面的推理可知，一个 $m$ 维子空间一共有 $(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1})$ 个不同的基，因此 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的 $m$ 维子空间的个数等于

$$\begin{aligned}&\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{m-1})}\\&=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-(m-1)}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}.\end{aligned}$$ □

**定义1.7** 设 $m$，$n$ 是非负整数，$n\geqslant m\geqslant 0$. 引进记号

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-(m-1)}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}, \text{如果 } m>0.$$

和

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1.$$

并把它们称为Gauss **系数**.

**命题1.7** 设 $m$ 和 $n$ 都是非负整数，而 $q \neq 1$.

(i) $\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_q = 1$.

(ii) 如果$0 \leqslant n < m$，那么$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = 0$.

(iii) 如果$0 \leqslant m \leqslant n$，那么

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_q.$$

**证明** (i)由定义(1.7)立刻推出；(ii)在命题(1.4)中已经证明. 现在来证明(iii).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q &= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-(m-1)}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-(m-1)}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)} \\
&\quad \times \frac{(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)}{(q^{n-m-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{m+1}-1)}{(q^{n-m}-1)(q^{n-m-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_q.
\end{aligned}$$

□

**命题1.8** ($q$ Pascal 三角形)设 $m \geqslant 1$，$q \neq 1$. 那么

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} x-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} x-1 \\ m \end{bmatrix}_q. \tag{1.9}$$

**证明** 由定义1.7直接计算可知(1.9)式成立. 这里略去其详细步骤. □

**命题1.9** 设 $y$ 是未定元，而 $n$ 是非负整数，那么

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1+q^i y) = \sum_{m=0}^{n} q^{\binom{m}{2}} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q y^m. \tag{1.10}$$

**证明** 可对 $n$ 作数学归纳法来证明，读者写出其具体步骤.

□

命题1.9中的 $y$ 取 $-1$ 时，可得

**推论1.10** 设 $n$ 是非负整数，$q\neq 1$，那么

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m q^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = 0. \qquad \square$$

**例1.3(续)** 设 $V$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的向量空间. 再设 $X,Y\in\mathscr{L}_f(V)$，即 $X$，$Y$ 是 $V$ 的有限维子空间，定义

$$\mu(X,Y)=\begin{cases} 0, & \text{如果 } X\not\leqslant Y, \\ (-1)^r q^{\binom{r}{2}}, & \text{如果 } X\leqslant Y, \text{其中 } r=\dim Y-\dim X. \end{cases} \tag{1.11}$$

显然，$\mu(X,Y)$适合定义1.6中的条件(i)和(ii). 再来验证$\mu(X,Y)$适合(iii). 假设 $X<Y$，即 $X\leqslant Y$. 再假定 $\dim Y-\dim X=r$，那么 $r>0$，而对于任意 $j$，$0\leqslant j\leqslant r$，一共有$\begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix}_q$个子空间 $Z$ 适合 $X\leqslant Z\leqslant Y$，而 $\dim Z=\dim X+j$. 根据推论1.10，

$$\begin{aligned}\sum_{X\leqslant Z\leqslant Y}\mu(X,Z) &= 1+\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_q(-1)^1 q^{\binom{1}{2}}+\begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix}_q(-1)^2 q^{\binom{2}{2}} \\ &\quad +\cdots+\begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix}_q(-1)^j q^{\binom{j}{2}}+\cdots \\ &\quad +\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}_q(-1)^r q^{\binom{r}{2}}=0.\end{aligned}$$

因此 $\mu(X,Y)$就是 $\mathscr{L}_f(V)$上的 Möbius 函数.

特别，当 $V=\mathbb{F}_q^{(n)}$ 时，就可得到 $\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$上的 Möbius 函数.

□

**推论1.11** 设对于非负整数 $k$，$R$ 中都有一个元素 $a_k$ 与之对应，这就定义了$\mathbb{N}\cup\{0\}$上的一个函数 $a$，即

$$\begin{aligned} a:\mathbb{N}\cup\{0\} &\longrightarrow R \\ k &\longmapsto a_k \end{aligned}$$

对于非负整数 $n$，令

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a_k, \tag{1.12}$$

那么

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q b_k. \tag{1.13}$$

反之，假设 $b$ 是定义在$\mathbb{N} \cup \{0\}$上而在 $R$ 中取值的函数

$$b: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow R$$
$$k \longmapsto b_k$$

对于任一非负整数 $n$，按(1.13)式来定义 $a_n$,那么(1.12)式成立.

**证明** 设 $V$ 是$\mathbb{F}_q$ 上的可数无限维向量空间. 对 $V$ 的任一 $n$ 维子空间 $W$,规定 $R$ 中的元素 $a_n$ 与之对应. 这就定义了在$\mathscr{L}_f(V)$上而在 $R$ 中取值的函数.

$$a: \mathscr{L}_f(V) \longrightarrow R$$
$$W \longmapsto a(W) = a_{\dim W},$$

对于任意 $W \in \mathscr{L}_f(V)$, $\dim W = n$. 令 $U$ 是 $W$ 的子空间，$\dim U = k$，规定

$$b(W) = \sum_{U \leqslant W} a(U). \tag{1.14}$$

显然，如果 $\dim W = \dim W'$，则 $b(W) = b(W')$. 再令 $b_{\dim W} = b(W)$. 考虑 $V$ 中 $k$ 维子空间的个数是$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$，所以(1.14)式即是(1.12)式. 根据命题1.4,从(1.14)式推出

$$a(W) = \sum_{U \leqslant W} b(U)\mu(U,W). \tag{1.15}$$

因为 $a(W) = a_{\dim W}$, $b(U) = b_{\dim U}$，根据(1.11)式有 $\mu(U,W) = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}}$，所以从(1.15)式可推出(1.13)式.

反之，按照

$$b: \mathscr{L}_f(V) \longrightarrow R$$
$$W \longmapsto b(W) = b_{\dim W}$$

来定义在 $\mathscr{L}_f(V)$ 上而在 $R$ 中取值的函数 $b$. 对于任意 $W \in \mathscr{L}_f(V)$，按照(1.15)式来定义 $a(W)$，其中 $U$ 是 $W$ 的子空间. 当 $\dim W = \dim W'$时，有 $a(W) = a(W')$. 令 $\dim W = n$, $\dim U = k$. 那么(1.15)式即为(1.13)式. 再根据命题1.4，从(1.15)式可推出

(1.14)式. 再从(1.14)式就可推出(1.12)式. □

公式(1.13)((1.12))称为公式(1.12)((1.13))的 Gauss **反演公式**.

命题1.9又有以下的等价形式.

**命题1.12** 设 $x$ 是未定元，而 $n$ 是非负整数. 那么

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x-q^i)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}q^{\binom{n-m}{2}}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q x^m. \qquad (1.16)$$

**证明** 将 $y=-\frac{1}{x}$ 代入(1.10)式,再乘以 $x^n$,即得(1.16)式.

□

**定义1.8** 设 $q$ 是素数幂,$n$ 是非负整数,并且 $x$ 是未定元,多项式

$$g_n(x)=(x-1)(x-q)\cdots(x-q^{n-1}),\quad 如果 n\geqslant 1,$$

和

$$g_0(x)=1$$

就叫做 Gauss **多项式**.

由命题1.12，有

$$g_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}q^{\binom{n-m}{2}}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q x^m.$$

依 Gauss 反演公式可得

**命题1.13** 设 $q$ 是素数幂, $n$ 是非负整数, 而 $x$ 是未定元, 那么

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q g_k(x).$$ □

## §1.5 特征多项式

**定义1.9** 设 $P$ 是含有最小元0的偏序集，对于 $a\in P$，如果 $l(0,a)$ 存在,即0,$a$ 链可加细成极大链,且所有0,$a$ 极大链有相同的有限长 $l(0,a)$,就把它叫做 $a$ 的**秩**,记作 $r(a)$. 如果对任意 $x\in$

$P$，都规定了秩 $r(x)$，就称 $P$ 有**秩函数** $r: p \longrightarrow \boldsymbol{N}_0$，其中$\boldsymbol{N}_0$是全体自然数和0组成的集合，有时简称 $P$ 有**秩函数** $r$.

例如，在例1.1中，对于 $A \in \mathscr{P}_f(S)$，有 $r(A)=|A|$，而在例1.3中，对于 $U \in \mathscr{L}_f(V)$，以$\{0\}$为起点，$U$ 为终点的极大链的长都等于 $\dim U$，所以 $r(U)=\dim U$.

**命题1.14** 设 $P$ 是含有最小元0的偏序集，并假定对于任意 $a$，$b \in P$ 而 $a<b$，$a$，$b$ 链均可加细成极大链. 如果 $P$ 满足 JD 条件，那么 $P$ 上存在秩函数 $r: P \longrightarrow \boldsymbol{N}_0$，并且

(i) $r(0)=0$，

(ii) 如果 $a<\cdot b$，那么 $r(b)=r(a)+1$.

反之，如果存在 $P$ 上而在$\boldsymbol{N}_0$中取值的函数 $r$，并且满足(i)，(ii)，那么 $P$ 满足 JD 条件，并且以 $r$ 为 $P$ 上的秩函数.

**证明** 假设 $P$ 满足 JD 条件，对于任意 $x \in P$，因为0，$x$ 链均可加细成极大链，所以 $l(0,x)$一定存在. 于是 $P$ 上具有秩函数 $r$，使得 $r(x)=l(0,x)$. 显然(i)成立. 设 $a<\cdot b$. $0=a_0<\cdot a_1<\cdot \cdots <\cdot a_n=a$，那么$0=a_0<\cdot a_1<\cdot \cdots <\cdot a_n<\cdot a_{n+1}=b$. 因此 $l(0,b)=l(0,a)+1$，从而(ii)成立.

反之，我们先证命题：对于任意 $a \in P$，如果 $P$ 中的0，$a$ 链可以加细成长为 $n$ 的极大链，那么 $r(a)=n$. 我们用数学归纳法来证明这个结论. 当 $n=0$时，$a=0$，所以 $r(a)=r(0)=0$. 当 $n=1$时，有$0<\cdot a$. 由(i)和(ii)知 $r(a)=r(0)+1$，所以 $r(a)=1$. 假设 $n=k$ 时，以上的命题成立. 设 $a \in P$ 而 $P$ 中0，$a$ 链可以加细成长为 $k+1$的极大链，即 $r(a)=k+1$. 令$0=a_0<\cdot a_1<\cdot \cdots <\cdot a_k<\cdot a_{k+1}=a$ 是长为 $k+1$的0，$a$ 极大链，那么$0=a_0<\cdot a_1<\cdot \cdots <\cdot a_k$ 是长为 $k$ 的极大链. 由归纳假设，$r(a_k)=k$，而 $a_k<\cdot a$. 根据(ii)可得 $r(a)=r(a_k)+1=k+1$. 由数学归纳法原理可知 $r(a)=n$.

由上述命题可知，任一0，$a$ 极大链的长均等于 $r(a)$，所以$r(a)=l(0,a)$，即 $r$ 是 $P$ 上的秩函数.

下面证明 $P$ 满足 JD 条件. 设 $a$，$b \in P$，而 $a<b$. 再设

$$a = x_0 <\cdot x_1 <\cdot x_2 <\cdot \cdots <\cdot x_n = b \qquad (1.17)$$

是 $a,b$ 极大链. 任选一个0，$a$ 极大链 $0=y_0<\cdot y_1<\cdot y_2<\cdot\cdots<\cdot y_m=a$. 那么 $0=y_0<\cdot y_1<\cdot y_2<\cdot\cdots<\cdot y_m=a=x_0<\cdot x_1<\cdot x_2<\cdot\cdots<\cdot x_n=b$ 就是 $P$ 中的 $0,b$ 极大链. 根据上面的证明，$r(a)=m$、$r(b)=m+n$. 因此 $a,b$ 极大链(1.17)的长 $=n=r(b)-r(a)$. 这就证明了 JD 条件.

**推论1.15** 设 $P$ 是含有最小元0的偏序集. 假定对于任意 $a,b\in P$ 而 $a<b$，$a,b$ 链均可加细成极大链. 再假定 $P$ 上存在秩函数 $r$. 那么对任意 $a$，$b\in p$ 而 $a<b$，$l(a,b)=r(b)-r(a)$. □

**定义1.10** 设 $P$ 是具有最小元0和最大元1的有限偏序集，并且 $P$ 上又有秩函数 $r$，那么多项式

$$\chi(P,x)=\sum_{a\in P}\mu(0,a)x^{r(1)-r(a)}$$

叫做 $P$ 上的**特征多项式**.

由命题1.14，可知如下的命题成立.

**命题1.16** 设 $P$ 是具有最小元0和最大元1的偏序集. 假定对任意 $a,b\in P$ 而 $a<b$，$a,b$ 链均可加细成极大链. 如果 $P$ 满足 JD 条件，那么 $P$ 有特征多项式. □

**命题1.17** 设 $S$ 是含 $n$ 个元素的集合，$\mathscr{P}(S)$ 是集合 $S$ 的幂集合. 对于 $A,B\in\mathscr{P}(S)$，如果 $A\supset B$，就规定 $A\geqslant B$. 那么对所规定的偏序关系 $\geqslant$，有

$$\chi(\mathscr{P}(S),x)=(x-1)^n.$$

**证明** 由例1.1知，$\mathscr{P}(S)$ 对于所规定的关系 $\geqslant$，作成一个有限偏序集，并且 $\phi,S$ 分别是 $\mathscr{P}(S)$ 的最小元和最大元. 所以

$$\chi(\mathscr{P}(S),x)=\sum_{A\in\mathscr{P}(S)}\mu(\phi,A)x^{r(S)-r(A)}.$$

对于 $A,A'\in\mathscr{P}(S)$，如果 $|A|=|A'|=m$，$0\leqslant m\leqslant n$，那么

$$x^{r(S)-r(A)}=x^{|S|-|A|}=x^{n-m}=x^{|S|-|A'|}=x^{r(S)-r(A')}.$$

因为 $S$ 所含 $m$ 元子集的个数是 $\binom{n}{m}$，而 $\mu(0,A)=(-1)^m$，所以

$$\chi(\mathscr{P}(S),x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}x^{n-m}=(x-1)^n. \qquad \square$$

**命题1.18** 设$V$是域$\mathbb{F}$上的$n$维向量空间. 令$\mathscr{L}(V)$是$V$中的所有子空间组成的集合. 对于$U,W\in\mathscr{L}(V)$，如果$U\supset W$，就规定$U\geqslant W$. 那么对所规定的偏序关系$\geqslant$，有

$$\chi(\mathscr{L}(V),x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-q^i)=g_n(x).$$

**证明** 由例1.3知，$\mathscr{L}(V)$对于所规定的偏序关系$\geqslant$，作成一个偏序集，并且$\{0\}$和$V$分别是$\mathscr{L}(V)$的最小元和最大元. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(V),x)=\sum_{U\in\mathscr{L}(V)}\mu(\{0\},U)x^{r(V)-r(U)}.$$

对于$U$，$U'\in\mathscr{L}(V)$，如果$\dim U=\dim U'=m$，$0\leqslant m\leqslant n$，那么

$$x^{r(V)-r(U)}=x^{\dim V-\dim U}=x^{n-m}=x^{\dim V-\dim U'}=x^{r(V)-r(U')}.$$

因为$V$中$m$维子空间的个数是$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q$，而$\mu(0,U)=(-1)^mq^{\binom{m}{2}}$. 所以

$$\begin{aligned}\chi(\mathscr{L}(V),x)&=\sum_{m=0}^{n}(-1)^mq^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_qx^{n-m}\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_qx^k.\end{aligned}$$

再利用命题1.12，可得

$$\chi(\mathscr{L}(V),x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-q^i)=g_n(x).\qquad\square$$

## §1.6 格

**定义1.11** 偏序集$L$称为格，如果$L$中任意两个元素都有上确界和下确界. 把$L$中元素$a$和$b$的上确界和下确界分别记为$a\vee b$和$a\wedge b$，即

$$a\vee b=\operatorname{Sup}\{a,b\},\quad a\wedge b=\operatorname{Inf}\{a,b\}.$$

$a\vee b$读作$a$并$b$，$a\wedge b$读作$a$交$b$.

当$L$含有限个元素时，就称它为**有限格**.

易知，例1.1—例1.3中的偏序集，对于所规定的偏序关系，均作成格. 当例1.1中的$S$是有限集时，$\mathscr{P}(S)$是有限格.

**例1.4** 设$\mathbb{F}_q$是$q$个元素的有限域，$q$是素数幂．再设$\mathbb{F}_q^{(n)}$是$\mathbb{F}_q$上的$n$维行向量空间．那么$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$按例1.3所规定的偏序关系作成一个有限格，并且对于$X$、$Y\in\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$，有$X\vee Y=\bigcap\{Z\subset\mathbb{F}_q^{(n)}\mid X\cup Y\subset Z\}$，$X\wedge Y=X\cap Y$． □

由格的定义可知，$y\geqslant x$等价于$x\wedge y=x$或$x\vee y=y$．

如果$L$有极大元(或极小元)时，这个极大元(或极小元)就一定是最大元(或最小元)．

由归纳法易知，格$L$中任意有限个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$的上确界$\mathrm{Sup}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$一定存在．记为$a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$．同样，$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_n$的下确界$\mathrm{Inf}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$也存在，记为$a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$．当$L$的子集$A$($A$可以是无限子集)的上确界$\mathrm{Sup}A$存在时，记为$\mathrm{Sup}A=\bigvee_{a\in A}a$．

容易看到，$\vee$和$\wedge$是$L$的两个代数运算，并且对于$L$中的任意元素$a$，$b$，$c$来说，下列性质成立：

$L1$ $a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$ （交换律）；

$L2$ $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ （结合律）；

$L3$ $a\vee a=a$，$a\wedge a=a$ （幂等律）；

$L4$ $(a\vee b)\wedge a=a$，$(a\wedge b)\vee a=a$ （吸收律）．

上述事实反过来也成立，即有

**命题1.19** 设$L$是含有两个二元运算$\vee$，$\wedge$的代数系统，并假定对这两个代数运算$L1$—$L4$成立．如果规定

$$b\geqslant a\Leftrightarrow a\wedge b=a(\text{或等价地 }a\vee b=b),$$

那么$L$作成一个格，并且

$$\mathrm{Sup}\{a,b\}=a\vee b,\ \mathrm{Inf}\{a,b\}=a\wedge b.$$

**证明** 留给读者作为练习． □

根据命题1.19，有时把含有代数运算$\vee$、$\wedge$而满足$L1$—$L4$的代数系统$L$叫做格．

在格$L$中，$\vee$和$\wedge$的地位具有对称性，所以在讨论格$L$的性质时，有下面的

**推论1.20**（对偶原理） 在格 $L$ 中，如果通过∨和∧表述的一个命题 $M$ 为真，那么把 $M$ 中的∨和∧互换后所得的命题 $M'$ 也真.

□

**定义1.12** 设 $L$ 是一格，$S$ 是 $L$ 的非空子集. 如果 $S$ 对于 $L$ 的∧和∨是封闭的，就称 $S$ 是 $L$ 的**子格**.

**例1.5** 设 $L$ 是一个格，$a$，$b\in L$，$a\leqslant b$. 那么 $L$ 中的闭区间 $[a,b]$ 是 $L$ 的子格.

□

**定义1.13** 设 $L$ 和 $L'$ 是两个格，它们的运算分别是∨，∧和∨′，∧′，而 $\varphi$ 是 $L$ 到 $L'$ 的双射. 如果

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\vee'\varphi(b),\quad \varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\wedge'\varphi(b).$$

就称 $\varphi$ 是 $L$ 到 $L'$ 的格**同构映射**，$L$ 和 $L'$ 称为**同构**的，记为 $L\cong L'$.

□

**命题1.21** 格 $L$ 到 $L'$ 的双射 $\varphi$ 是格同构映射当且仅当 $\varphi$ 和 $\varphi^{-1}$ 保序，即当且仅当，将 $L$ 和 $L'$ 视为偏序集时，$\varphi$ 是从偏序集 $L$ 到偏序集 $L'$ 的同构.

**证明** 设≥和≥′分别是格 $L$ 和 $L'$ 的序，并且令

$$\begin{aligned}\varphi: L &\longrightarrow L'\\ a &\longmapsto a'\end{aligned}$$

是 $L$ 到 $L'$ 的格同构映射. 那么 $\varphi^{-1}$ 也是 $L'$ 到 $L$ 的格同构映射. 对于任意的 $a$，$b\in L$，如果 $a\leqslant b$，就有 $a\wedge b=a$，于是 $\varphi(a)\wedge'\varphi(b)=\varphi(a)$，$\varphi(a)\leqslant'\varphi(b)$. 同理可证：对于任意的 $a'$，$b'\in L$，如果 $a'\leqslant b'$，那么 $\varphi^{-1}(a')\leqslant\varphi^{-1}(b')$.

反之，假设 $\varphi$ 是 $L$ 到 $L'$ 的一个双射，而 $\varphi$ 和 $\varphi^{-1}$ 保序，那么 $a\geqslant b$ 当且仅当 $a'\geqslant b'$. 令 $d=a\vee b$，那么 $d\geqslant a$，$b$，从而 $d'\geqslant a'$，$b'$. 假定 $e'\geqslant a'$，$b'$，就有 $\varphi^{-1}(e')\geqslant'\varphi^{-1}(a')$，$\varphi^{-1}(b')$，即 $e\geqslant a$，$b$，从而 $e\geqslant d$，于是 $e'\geqslant d'$. 因此 $d'=a'\vee b'$，即 $\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\vee'\varphi(b)$. 类似地可证 $\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\wedge'\varphi(b)$. □

## §1.7 半模格

**定义1.14** 格 $L$ 称为**半模格**，如果对所有的 $a$，$b\in L$，

$$a\wedge b\prec a\Rightarrow b\prec a\vee b. \tag{1.18}$$

格 $L$ 称为下半模格，如果对所有的 $a$，$b\in L$，

$$b\prec a\vee b\Rightarrow a\wedge b\prec a.$$

例如，在例1.1中，$S$ 是有限集时，$\mathscr{P}(S)$是半模格，而在 $S$ 是无限集时，$\mathscr{P}_f(S)$也是半模格. 事实上，对于 $A,B\in\mathscr{P}_f(S)$，$A\wedge B\prec A$，那么$|A|-|A\wedge B|=1$. 令 $A\wedge B=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$m$ 是非负整数，那么 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{m+1}\}$，$B=A\wedge B$ 或 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_l\}$，其中 $l$ 是正整数，并且对任意 $i(1\leqslant i\leqslant m+1)$和 $j(1\leqslant j\leqslant l)$都有 $a_i\neq b_j$. 于是，在前一种情形下，有 $A\vee B=A$；而在后一种情形下，有 $A\vee B=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1},b_1,b_2,\cdots,b_l\}$. 不论哪种情形，都有 $B\prec A\vee B$.

**命题1.22** 格 $L$ 是半模格当且仅当对所有的 $a$，$b\in L$，

$$a\prec b\Rightarrow a\vee c\prec b\vee c \text{ 或 } a\vee c=b\vee c,\text{对任意 } c\in L. \tag{1.19}$$

**证明** 设 $L$ 是半模格，$a$，$b$ 和 $c$ 是 $L$ 中的任意元素. 当 $a\prec b$ 时，有 $a\vee c\leqslant b\vee c$. 如果 $a\vee c\neq b\vee c$，就有 $b\neq a\vee c$，从而 $b\wedge(a\vee c)<b$. 再由 $a\prec b$ 得 $a\leqslant b\wedge(a\vee c)$. 所以 $b\wedge(a\vee c)=a\prec b$. 根据(1.18)式可得 $a\vee c\prec b\vee(a\vee c)$. 但是 $b\vee(a\vee c)=b\vee c$，因此 $a\vee c\prec b\vee c$，即(1.19)成立.

反之，假设对于任意 $a,b\in L$，(1.19)成立. 设 $a\wedge b\prec a$. 由(1.19)可得 $b=(a\wedge b)\vee b\prec a\vee b$ 或 $b=a\vee b$，而后者不成立，否则有 $a\leqslant b$，$a\wedge b=a$，这与 $a\wedge b\prec a$ 矛盾. 所以只能是 $b\prec a\vee b$. 因此 $L$ 是半模格. □

**推论1.23** 设 $L$ 是含有极小元0的半模格，$p,a\in L$，并且$0\prec p$，$p\not\leqslant a$. 那么 $a\prec a\vee p$. □

**命题1.24** 设 $L$ 是半模格，$a$，$b$ 是 $L$ 中的任意元素，并且 $a$

$<b$. 如果以 $a$ 为起点，$b$ 为终点的链均可加细成有限极大链，那么 $L$ 满足 JD 条件.

**证明** 对于任意元素 $a$，$b\in L$，$a<b$. $L$ 中的 $a$，$b$ 链均可加细成有限极大链，所以 $a$，$b$ 极大链的长均有限. 我们用数学归纳法证明：$\forall\, a$，$b\in L$，如果有一条 $a$，$b$ 极大链的长是 $n$，那么所有 $a$，$b$ 极大链的长是 $n$.

当 $n=1$时，有 $a=x_0<\cdot x_1=b$. 此时，$a$，$b$ 极大链只有这一个，所以命题1.24成立. 假设 $t\leqslant n-1$时，命题1.24成立，即对任意 $a$，$b\in L$，$a<b$，如果有一条 $a$，$b$ 极大链的长是 $t$，那么所有 $a$，$b$ 极大链的长是 $t$. 今设

$$a=x_0<\cdot x_1<\cdot \cdots <\cdot x_n=b \tag{1.20}$$

是 $L$ 中长度为 $n$ 的 $a$，$b$ 极大链，而

$$a=y_0<\cdot y_1<\cdot \cdots <\cdot y_m=b \tag{1.21}$$

是 $L$ 中任一条长度为 $m$ 的 $a$，$b$ 极大链，我们来证明 $m=n$.

如果 $x_1=y_1$，那么极大链

$$x_1<\cdot x_2<\cdot \cdots <\cdot x_n=b \tag{1.22}$$

的长是 $n-1$. 由归纳假设，可知

$$x_1=y_1<\cdot y_2<\cdot \cdots <\cdot y_m=b$$

的长是 $n-1$. 所以 $m=n$，如果 $x_1\neq y_1$，那么 $x_1\wedge y_1=a<\cdot x_1$，$y_1$. 根据 $L$ 的半模性，可得 $x_1<\cdot x_1\vee y_1$和 $y_1<\cdot x_1\vee y_1$. 因为以 $x_1$为起点，$b$ 为终点的极大链(1.22)的长是 $n-1$，由归纳假设，可得极大链 $x_1<\cdot x_1\vee y_1<\cdot\cdots<\cdot x_n=b$ 的长是 $n-1$. 从而极大链 $y_1<\cdot x_1\vee y_1<\cdot\cdots<\cdot y_m=b$ 的长是 $n-1$. 再由归纳假设，可得极大链 $y_1<\cdot y_2<\cdot\cdots<\cdot y_m=b$ 的长是 $n-1$. 因此 $m=n$.

由数学归纳法原理，可知命题1.24成立. □

**命题1.25** 设 $L$ 是含有极小元0的格，并且 $L$ 中的所有 $a$，$b$ 链均可加细成有限极大链. 那么 $L$ 是半模格当且仅当 $L$ 具有秩函数 $r$，使得对任意 $x$，$y\in L$，有

$$r(x\wedge y)+r(x\vee y)\leqslant r(x)+r(y). \tag{1.23}$$

**证明** 假设 $L$ 是含有极小元0的半模格，并且 $L$ 中的 $a$，$b$ 链

均可加细成有限极大链．由命题1.24，$L$ 满足JD条件．再根据命题1.14，$L$ 具有秩函数 $r$，设 $x$，$y\in L$，而

$$x\wedge y=c_0<\cdot c_1<\cdot\cdots<\cdot c_t=x \tag{1.24}$$

是 $L$ 中的一个 $x\wedge y$，$x$ 极大链，那么

$$y=(x\wedge y)\vee y\leqslant c_1\vee y\leqslant\cdots\leqslant c_t\vee y=x\vee y. \tag{1.25}$$

根据命题1.22，(1.25)中不同元素按原来的相对次序所构成的链是以 $y$ 为起点，$x\vee y$ 为终点的极大链．再根据推论1.15，这个极大链的长是 $r(x\vee y)-r(y)$，它不会超过极大链(1.24)的长(因为可能有某个 $i(1\leqslant i\leqslant t-1)$ 使 $c_i\vee y=c_{i+1}\vee y$)，而(1.24)的长是 $r(x)-r(x\wedge y)$．所以

$$r(x)-r(x\wedge y)\geqslant r(x\vee y)-r(y).$$

因此(1.23)成立．

反之，假设 $L$ 含有极小元0，并且具有秩函数 $r$，且它满足(1.23)．对于 $x,y\in L$，如果 $x\wedge y<\cdot x$，就有 $r(x)-r(x\wedge y)=1$．由(1.23)可得 $r(x\vee y)-r(y)\leqslant 1$，从而 $y<\cdot x\vee y$ 或 $y=x\vee y$．而 $y=x\vee y$ 等价于 $x\wedge y=x$，它与 $x\wedge y<\cdot x$ 矛盾．所以 $y<\cdot x\vee y$．根据1.14，$L$ 是半模格． □

熟知，在例1.3中，当 $\dim V<\infty$ 时，$\mathscr{L}(V)$ 有秩函数 $r$，使得 $r(x)=\dim x$，$x\in\mathscr{L}(V)$，并且维数公式成立．从而(1.23)式成立．因此 $\mathscr{L}(V)$ 是半模格，同样 $\mathscr{L}_f(V)$ 也是半模格．

## §1.8 几何格

**定义1.15** 在含有极小元0的格 $L$ 中，覆盖0的元称为 $L$ 的**原子**．

**定义1.16** 含有极小元0的格 $L$ 称为**原子格**，如果对每个 $a\in L\setminus\{0\}$，$a$ 都是 $L$ 中一些原子的上确界，即 $a=\operatorname{Sup}\{p\in L;\ 0<\cdot p\leqslant a\}$．

例如，在例1.1中，取 $S$ 是一个可数集．对于 $x\in S$，$\{x\}$就是

$\mathscr{P}(S)$的原子. 任取 $X \in \mathscr{P}(S) \backslash \varphi, X=\{x_1, x_2, \cdots\}$，那么 $X=\operatorname{Sup}\{\{x_1\},\{x_2\},\cdots\}$. 因此$\mathscr{P}(S)$是原子格. 在例1.3中，$V$ 中的1维子空间是$\mathscr{L}(V)$的原子. 对于任意 $X \in \mathscr{L}(V) \backslash\{0\}$，设 $v_1, v_2, \cdots$是 $X$ 的一个基，那么 $X=\operatorname{Sup}\{Fv_1, Fv_2, \cdots\}$. 因此 $\mathscr{L}(V)$是原子格. 当 $F=\mathbb{F}_q, V=\mathbb{F}_q^{(n)}$ 时，$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$是一个原子格.

**命题1.26** 设 $p$ 是原子格 $L$ 的一个原子，那么对于任意 $x, y \in L$ 而 $x \neq y$，都有

(i) $p=x \vee y \Rightarrow p=x$ 而 $y=0$，　或 $p=y$ 而 $x=0$.

(ii) $p \wedge x=0$ 或 $p \wedge x=p$.

**证明** (i) 由 $p=x \vee y$，有$0 \leqslant x \leqslant p$，而 $p$ 是原子，所以 $p=x$ 或 $x=0$. 当 $p=x$ 时，从 $p=p \vee y$ 推出$0 \leqslant y \leqslant p$，但 $y \neq x=p$，所以 $y=0$. 而当 $x=0$时，有 $p=0 \vee y=y$.

(ii) 对于任意 $x \in L$，因为$0 \leqslant p \wedge x \leqslant p$，而 $p$ 又是原子，所以 $p \wedge x=0$，或 $p \wedge x=p$. □

**定义1.17** 格 $L$ 称为**几何格**，如果 $L$ 是没有无限链的半模原子格.

显然，在例1.1中，当$|S|=n$ 时，$\mathscr{P}(S)$不含无限链，而它又是半模格和原子格，所以$\mathscr{P}(S)$是几何格. 同样，在例1.3中，当 $\operatorname{dim} V=n$ 时，$\mathscr{L}(V)$是几何格. 特别，$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$是几何格.

**命题1.27** 在几何格 $L$ 中，对于任意 $x \in L \backslash\{0\}$，$x$ 都是有限个原子的上确界.

**证明** 假设存在 $x \in L \backslash\{0\}$，而 $x$ 不是有限个原子的上确界. 因为 $L$ 是原子格，$x$ 必是无限个原子所成集 $A$ 的上确界，那么总存在 $p_i \in A$，$i=2, 3, \cdots$，使得

$$p_i \not\leqslant p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{i-1}.$$

考虑到 $L$ 是含极小元0的半模格，根据推论1.23，可得到无限链

$$0 <\cdot\, p_1 <\cdot\, p_1 \vee p_2 <\cdot \cdots <\cdot\, p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{i-1} <\cdot\, p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_{i-1} \vee p_i <\cdot \cdots.$$

这与 $L$ 不含无限链矛盾. 因此命题1.27成立. □

**命题1.28** 设 $L$ 是一个格，其中所有的链均是有限的. $L$ 是

几何格当且仅当对所有的$a$，$b\in L$，

$$a<\cdot b\Leftrightarrow \text{存在原子 } p\text{，使得 } p\neq a,\ b=a\vee p. \tag{1.26}$$

**证明** 假设$L$是几何格，$a$，$b\in L$. 我们来证(1.26)成立. 如果$a<\cdot b$，当$a=0$时，$b$是一个原子，且$b\not\leqslant a$，而$b=a\vee b$. 下设$a\neq 0$. 由命题1.27，$a$和$b$是有限个原子的上确界. 那么存在互不相同的原子$p_1$，$p_2$，…，$p_l$，$p_{l+1}$，使得$a=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_l$，$p_{l+1}\not\leqslant a$，并且$a<a\vee p_{l+1}\leqslant b$. 再由$a<\cdot b$可得$b=a\vee p_{l+1}$. 反之，如果$L$中存在原子$p\not\leqslant a$，使得$b=a\vee p$. 由推论1.23可得$a<\cdot b$. 因此(1.26)成立.

现在假设对于$a$，$b\in L$，因为$L$中的所有链是有限的，所以$0$，$x$链都可加细成极大链

$$0=x_0<\cdot x_1<\cdot\cdots<\cdot x_t=x.$$

由(1.26)，$L$中存在原子$p_i(i=1,2,\cdots,t)$，使得

$$x_1=p_1,\quad x_j=x_{j-1}\vee p_j\ \ (j=2,3,\cdots,t).$$

从而

$$0<\cdot p_1<\cdot p_1\vee p_2<\cdot\cdots<\cdot p_1\vee p_2\cdots\vee p_t=x,$$

即$x$是$L$中原子$p_1$，$p_2$，…，$p_t$的上确界. 因此$L$是原子格. 下面来证明$L$是半模格. 设$a$，$b\in L$，$a\wedge b<\cdot a$. 我们只需证明$b<\cdot a\vee b$.

由上面的证明可知，$a\wedge b$一定是$L$中有限个原子的上确界，即

$$a\wedge b=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m<\cdot a,$$

其中$p_i(i=1,2,\cdots,m)$是$L$的原子. 根据(1.26)，存在$L$的原子$p_{m+1}$，使得$p_{m+1}\not\leqslant a\wedge b$，而

$$a=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m\vee p_{m+1}.$$

设$b$是原子$p_1'$，$p_2'$，…，$p_n'$的上确界，即

$$b=p_1'\vee p_2'\vee\cdots\vee p_n'.$$

由$p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m=a\wedge b\leqslant b$，得

$$b=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m\vee p_1'\vee p_2'\vee\cdots\vee p_l'.$$

不妨设$p_j'\neq p_i$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,l$，而$l\leqslant n$. 于是

$$a \vee b = (p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_m \vee p_1' \vee p_2' \vee \cdots \vee p_l') \vee p_{m+1}$$

$$= b \vee p_{m+1}.$$

注意到 $p_{m+1} \not\leqslant a \wedge b$，$p_{m+1} \leqslant a$，所以 $p_{m+1} \not\leqslant b$. 再由(1.26)，有 $b \prec b \vee p_{m+1} = a \vee b$. 因此 $b \prec a \vee b$ 成立.

根据假设，$L$ 又不含无限链，因此 $L$ 是几何格. □

**命题1.29** 设 $L$ 是具有0的格，$L$ 是几何格当且仅当 $L$ 满足以下条件：

G1 $L$ 不含无限链；

G2 对每个元素 $a \in L \backslash \{0\}$，$a = \text{Sup}\{p \in L: 0 \prec p \leqslant a\}$；

G3 $L$ 具有秩函数 $r$，使得对所有的 $x$，$y \in L$，都满足(1.23)

$$r(x \wedge y) + r(x \vee y) \leqslant r(x) + r(y).$$

**证明** 假设 $L$ 是几何格. 根据几何格的定义，G1和G2成立. 设 $a, b \in L$，$a < b$. 根据 $L$ 不含无限链，可知 $a$，$b$ 链可加细成极大链. 再由 $L$ 是半模格和命题1.25，$L$ 具有秩函数 $r$，且满足(1.23)，即G3成立.

反之，假设格 $L$ 含有极小元0，并且满足G1—G3. 显然，$L$ 是不含无限链的原子格. 下面只需证明 $L$ 是半模格. 因为 $L$ 中的链均是有限的，所以 $L$ 中的任意 $a$，$b$ 链可以加细成极大链. 根据G3和命题1.25，$L$ 是半模格. 因此 $L$ 是几何格. □

当 $L$ 是有限格时，命题1.29可写成

**命题1.30** 设 $L$ 是具有0的有限格，$L$ 是几何格当且仅当 $L$ 满足： □

$G_2'$ $L \backslash \{0\}$ 中的每个元素是其原子的并；

$G_3$ $L$ 具有秩函数 $r$，使得对所有 $x$，$y \in L$，都满足(1.23)

$$r(x \wedge y) + r(x \vee y) \leqslant r(x) + r(y).$$

# 第二章　子空间轨道生成的格

## §2.1　子空间格

设$\mathbb{F}_q$是$q$个元素的有限域，$q$是一个素数幂. 令$\mathbb{F}_q^{(n)}$是$\mathbb{F}_q$上的$n$维行向量空间. 在$\mathbb{F}_q^{(n)}$的所有子空间组成的集合$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$中，用包含关系来规定子空间的序，简称由包含关系规定$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$的序，那么$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$对于所规定的偏序$\geqslant$作成一个偏序集. 在偏序集$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$中，对于$\mathbb{F}_q^{(n)}$的子空间$X$和$Y$，由例1.4知，

$$X \vee Y = \bigcap \{Z \in \mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)}) \mid X \cup Y \subset Z\}, X \wedge Y = X \cap Y.$$

因此$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$是一个格. 根据§1.8，我们还知道它是几何格.

现在在集合$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$中，再按反包含关系来规定子空间的偏序，简称由反包含关系规定$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$的序. $\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$仍是偏序集，把它记作$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$. 因为$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$中的Sup $\{X, Y\}$和Inf $\{X, Y\}$正好分别是偏序集$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$（按包含关系规定子空间的偏序）中的Inf $\{X, Y\}$和Sup $\{X, Y\}$. 所以，在$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$中有

$$X \vee Y = X \cap Y,$$

$$X \wedge Y = \bigcap \{Z \in \mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q) \mid X \cup Y \subset Z\}.$$

因此$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$也是一个格.

**定义2.1**　格$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$称为$\mathbb{F}_q^{(n)}$的**子空间格**.

下面讨论格$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$和子空间格$\mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$之间的关系.

在$\mathbb{F}_q^{(n)}$中，把$n$维行向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$写成矩阵形式$(x_1 x_2 \cdots x_n)$（本书中又记作$[x_1, x_2, \cdots x_n]$），仍记作$x$. 设$P$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$的$m$维（$1 \leqslant m \leqslant n$）子空间，$v_1, v_2, \cdots, v_m$是$P$的一个基. $m \times n$矩阵

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

称为子空间 $P$ 的一个**矩阵表示**. 显然，$m$ 维子空间 $P$ 的矩阵表示不唯一. 并且 $P$ 的两个矩阵表示之间相差左乘一个 $m$ 阶可逆矩阵，即如果 $P_1$ 和 $P_2$ 是 $m$ 维子空间 $P$ 的两个矩阵表示，就有

$$P_1 = MP_2,$$

其中 $M$ 是 $m$ 阶可逆矩阵. 在不引起混淆时，仍用同一字母 $P$ 作为子空间 $P$ 的矩阵表示. 而零子空间$\{0\}$用0来表示.

我们记矩阵 $A$ 的转置矩阵为${}^tA$. 于是 $n$ 维列向量

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in \mathbb{F}_q$$

是 $n$ 维行向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$矩阵表示的转置，记作${}^tx$. 设 $P$ 是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的 $m$ 维子空间，我们规定：

$$P^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^{(n)} \mid v\,{}^tx = 0, \forall\, v \in P\}.$$

其中 $v\,{}^tx$ 是$1\times n$ 矩阵 $v$ 和 $n\times 1$矩阵${}^tx$ 的乘积. 令 $u\in P^\perp$，那么 $u$ 是齐次线性方程组

$$PX = 0 \tag{2.1}$$

的解. 由齐次线性方程组解空间的定义，可知 $P^\perp$ 是（1）的解空间. 再根据其解空间的理论，可知 $P$ 和 $P^\perp$ 有如下的关系：

**命题2.1** (a) $\dim P^\perp = n - \dim P$.

(b) $P_1 \subseteq P_2 \Leftrightarrow P_1^\perp \supseteq P_2^\perp$. □

由命题2.1可得

**命题2.2** 映射

$$\phi: \mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)}) \longrightarrow \mathscr{L}(n, \mathbb{F}_q)$$

$$P \longmapsto P^\perp$$

是一个格同构映射．即 $\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$和 $\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$格同构．□

因为$\mathscr{L}(\mathbb{F}_q^{(n)})$是一个几何格，以$\{0\}$为最小元，$\mathbb{F}_q^{(n)}$是最大元，而1维子空间是它的原子．所以又有

**推论2.3** $\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$是一个几何格，以$\mathbb{F}_q^{(n)}$为最小元，$\{0\}$为最大元．其$n-1$维子空间是它的原子．□

由命题2.2和命题1.18，可得

**命题2.4** 几何格 $\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$的特征多项式是

$$\chi(\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q),x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-q^i)=g_n(x),$$

其中$g_n(x)$是Gauss 多项式．□

## §2.2 格$\mathscr{L}(\mathscr{A})$

设$\mathscr{A}$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$中$l$个不同的$m$维子空间($1\leqslant m\leqslant n-1$)组成的集合，而$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是$\mathscr{A}$中子空间的交组成的集合($\mathscr{A}$中的每个子空间是它本身的交，即$\mathscr{A}\subset\mathscr{L}(\mathscr{A})$)．约定$\mathbb{F}_q^{(n)}$是0个$m$维子空间的交，即$\mathbb{F}_q^{(n)}\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$．我们称$\mathscr{L}(\mathscr{A})$为由$\mathscr{A}$ **生成的集合**．如果按包含关系来规定$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的偏序$\geqslant$，即对于$X,Y\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$，

$$X\geqslant Y\Longleftrightarrow X\supset Y.$$

那么$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是一个偏序集．$\bigcap\limits_{X\in\mathscr{A}}X$和$\mathbb{F}_q^{(n)}$分别是它的最小元和最大元；如果按反包含关系来规定$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的偏序$\geqslant$，即对于$X,Y\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$，

$$X\geqslant Y\Longleftrightarrow Y\supset X.$$

那么$\mathscr{L}(\mathscr{A})$也是一个偏序集，$\mathbb{F}_q^{(n)}$是它的最小元，而$\bigcap\limits_{X\in\mathscr{A}}X$是它的最大元．

**定理2.5** 如果按包含(或反包含)关系规定集合$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的序，那么$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是一个有限格．

**证明** 在按包含和反包含关系规定$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的偏序的两种情形，证明的方法相同，我们只对反包含的情形进行证明．$|\mathscr{L}(\mathscr{A})|<\infty$是明显的．主要证明它是格．因为$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是偏序集，所以只需

证明：在偏序集 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中对于交与并是封闭的．任取 $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$．由 $A_1$ 和 $A_2$ 均是 $\mathscr{A}$ 中 $m$ 维子空间的交，可知 $A_1 \vee A_2 = A_1 \cap A_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$．又 $A_1 \cup A_2 \subseteq \mathbb{F}_q^{(n)}$，而 $\mathbb{F}_q^{(n)} \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$，并且 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中包含 $A_1 \cup A_2$ 的子空间的交也包含 $A_1 \cup A_2$，所以 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中有唯一包含 $A_1 \cup A_2$ 的最小子空间．因此 $A_1 \wedge A_2 = \cap \{Z \in \mathscr{L}(\mathscr{A}) \mid A_1 \cup A_2 \subseteq Z\} \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$． □

**定义2.2** 按照反包含关系规定集合 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 的序，所作成的格 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 称为由 $\mathscr{A}$ **生成的格**．

以后不作特别说明时，格 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 均指由 $\mathscr{A}$ 生成的格 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$．

由偏序集上秩函数的定义，可得

**定理2.6** 设 $\mathscr{A}$ 是由 $m$ 维子空间组成的集合（$1 \leqslant m \leqslant n-1$），而 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 是由 $\mathscr{A}$ 生成的集合．

（i）如果按包含关系来规定集合 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 的偏序，并且对于 $X \in \mathscr{L}(\mathscr{A}) \backslash \{\mathbb{F}_q^{(n)}\}$，$\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中的任一以 $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$ 为起点而以 $X$ 为终点的极大链

$$\bigcap_{X \in \mathscr{A}} A = X_0 <\cdot X_1 <\cdot \cdots <\cdot X_p = X$$

满足 $\dim X_{i+1} - \dim X_i = 1$，其中 $i = 0, 1, \cdots, p-1$．那么 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 有秩函数 $r$，使得

$$r(X) = \begin{cases} \dim X - \dim \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A, \text{如果 } X \in \mathscr{L}(\mathscr{A}), X \neq \mathbb{F}_q^{(n)}, \\ m + 1 - \dim \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A, \text{如果 } X = F_q^{(n)}. \end{cases}$$

（ii）如果按反包含关系来规定集合 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 的偏序，并且对于 $X \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$，$\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 中的任一以 $F_q^{(n)}$ 为起点而以 $X$ 为终点的极大链

$$F_q^{(n)} = X_1 <\cdot X_m <\cdot X_{m-1} <\cdot \cdots <\cdot X_p = X$$

满足 $\dim X_{i+1} - \dim X_i = 1$ 和 $X_m = A_i \in \mathscr{A}$，其中 $i = p, p+1, \cdots, m-1$．那么 $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ 有秩函数 $r$，使得

$$r(X) = \begin{cases} m + 1 - \dim X, & \text{如果 } X \in \mathscr{L}(\mathscr{A}), X \neq \mathbb{F}_q^{(n)}, \\ 0, & \text{如果 } X = F_q^{(n)}. \end{cases}$$

□

**定理2.7** 设$\mathscr{A}$是由$l$个$n-1$维子空间组成的集合，那么由$\mathscr{A}$生成的格$\mathscr{L}(\mathscr{A})$具有秩函数$r$，使得$r(X)=\operatorname{codim}X$，$X\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$.

**证明** 设$U=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_k\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$，这里$U_i\in\mathscr{A}$，$i=1,2,\cdots,k$，不妨设

$$U_i\not\supset U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{i-1},i=2,3,\cdots,k.$$

因为

$$\dim U_i=n-1,U_i+(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{i-1})=\mathbb{F}_q^{(n)}.$$

根据维数公式，

$$\begin{aligned}&\dim(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{i-1}\cap U_i)\\&=\dim U_i+\dim(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{i-1})-\dim\mathbb{F}_q^{(n)}\\&=\dim(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{i-1})-1.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_q^{(n)}&<\cdot U_1<\cdot(U_1\cap U_2)<\cdot\cdots<\cdot(U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_{k-1})\\&<\cdot U(=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_k)\end{aligned}$$

是$\mathscr{L}(\mathscr{A})$中的极大链，其长为$k$，而$\operatorname{codim}U=k$.

再设

$$\mathbb{F}_q^{(n)}<\cdot V_1<\cdot V_2<\cdot\cdots<\cdot V_l=U$$

是偏序集$\mathscr{L}(\mathscr{A})$中的任一极大链. 显然，$V_1\in\mathscr{A}$. 设$V_1=U_1\in\mathscr{A}$. 再设$V_2=U_{21}\cap\cdots\cap U_{2j}$，$U_{2i}\in\mathscr{A}$. 那么$V_2=U_1\cap U_{21}\cap\cdots\cap U_{2j}$，删去多余的$U_{2i}$后，可设$U_{21}\not\supset U_1$，$U_{22}\not\supset U_1\cap U_{21}$，$\cdots$，$U_{2j}\not\supset U_1\cap U_{21}\cap\cdots\cap U_{2j-1}$. 因为$U_1=V_1<\cdot V_2=U_1\cap U_{21}\cap\cdots\cap U_{2j}$，所以$j=1$. 故可设$V_2=U_1\cap U_2$，$U_1$，$U_2\in\mathscr{A}$. 如此继续下去，可设$V_i=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_i$，$i=1,2,\cdots l$. 根据上一段的证明，$\operatorname{codim}U=l$. 因此$k=l$.

这就证明了，对于任意$U\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$，可规定$r(U)=\operatorname{codim}U$为秩函数. □

**定理2.8** 设$\mathscr{A}$是由$l$个$n-1$维子空间组成的集合，那么由$\mathscr{A}$生成的格$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是一个几何格. $\mathscr{A}$是它的原子集合.

**证明** 已知$\mathbb{F}_q^{(n)}$是$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的最小元.而$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是有限格,所以$\mathscr{L}(\mathscr{A})$不含无限链.因为$\mathscr{L}(\mathscr{A})\backslash\{\mathbb{F}_q^{(n)}\}$中的元均是$\mathscr{A}$中$m$维子空间的交,即$\forall X\in\mathscr{L}(\mathscr{A})\backslash\{\mathbb{F}_q^{(n)}\}$,有

$$X=\bigcap_{i=1}^{k}X_i=\bigvee_{i=1}^{k}X_i,$$

其中$X_i\in\mathscr{A}$.所以$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是原子格,而$\mathscr{A}$是它的原子集合.现在只需**证明**$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是半模格.

由定理2.7,$\mathscr{L}(\mathscr{A})$有秩函数$r$,使得$r(X)=\operatorname{codim}X,X\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$,设$A,B\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$,那么$A\vee B=A\cap B\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$.令$\langle A,B\rangle$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$中由$A,B$张成的子空间,那么有维数公式

$$\dim(\langle A,B\rangle)+\dim(A\cap B)=\dim A+\dim B.$$

因为$A\wedge B\supset A$, $B$, 所以$A\wedge B\supset\langle A, B\rangle$. 因此

$$\begin{aligned}r(A\wedge B)+r(A\vee B)&=\operatorname{codim}(A\wedge B)+\operatorname{codim}(A\vee B)\\&\leqslant\operatorname{codim}(\langle A,B\rangle)+\operatorname{codim}(A\cap B)\\&=\operatorname{codim}A+\operatorname{codim}B=r(A)+r(B).\end{aligned}$$

由命题1.25, 可知$\mathscr{L}(\mathscr{A})$是半模格. □

当然,我们也可以按包含关系来规定$\mathscr{L}(\mathscr{A})$中的序. 这样也得到一个格, 但有时不是几何格.

**例2.1** 设$x_1,x_2,x_3$是3维行向量空间$\mathbb{F}_q^{(3)}$的一个基,而$U_1=\mathbb{F}_qx_1+\mathbb{F}_qx_3,U_2=\mathbb{F}_qx_2+\mathbb{F}_qx_3,U_3=\mathbb{F}_qx_2+\mathbb{F}_q(x_1+x_3),U_4=\mathbb{F}_qx_1+\mathbb{F}_q(x_2+x_3)$是$\mathbb{F}_q^{(3)}$的2维子空间.令$\mathscr{A}=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$,那么$\mathscr{L}(\mathscr{A})=\{U_1,U_2,U_3,U_4,\mathbb{F}_qx_1,\mathbb{F}_qx_2,\mathbb{F}_qx_3,\mathbb{F}_q(x_1+x_3),\mathbb{F}_q(x_2+x_3),\mathbb{F}_q(x_1+x_2+x_3),\{0\},\mathbb{F}_q^{(3)}\}$.我们按包含关系来规定$\mathscr{L}(\mathscr{A})$的序.显然,它是一个格,$\mathbb{F}_qx_1,\mathbb{F}_qx_2,\mathbb{F}_qx_3,\mathbb{F}_q(x_1+x_3),\mathbb{F}_q(x_2+x_3)$和$\mathbb{F}_q(x_1+x_2+x_3)$是它的原子,而$\{0\}$和$\mathbb{F}_q^{(n)}$分别是它的最小元和最大元.因为$\mathscr{L}(\mathscr{A})$不含$\mathbb{F}_q^{(3)}$的2维子空间$\mathbb{F}_qx_1+\mathbb{F}_qx_2$,所以在$\mathscr{L}(\mathscr{A})$中有$\mathbb{F}_qx_1\vee\mathbb{F}_qx_2=\mathbb{F}_q^{(3)}$. 于是

$$\begin{aligned}\dim\mathbb{F}_qx_1+\dim\mathbb{F}_qx_2&<\dim(\mathbb{F}_qx_1\vee\mathbb{F}_qx_2)\\&\quad+\dim(\mathbb{F}_qx_1\wedge\mathbb{F}_qx_2).\end{aligned}$$

但对于$X\in\mathscr{L}(\mathscr{A})$,有$r(x)=\dim X$. 因此

$$r(\mathbb{F}_q x_1 \vee \mathbb{F}_q x_2) + r(\mathbb{F}_q x_1 \wedge \mathbb{F}_q x_2) > r(\mathbb{F}_q x_1) + r(\mathbb{F}_q x_2).$$

由命题1.30，可知$\mathscr{L}(\mathscr{A})$不是几何格. □

## §2.3 子空间轨道生成的格

设$G_n$是$\mathbb{F}_q$上的$n$级典型群之一，即$G_n = GL_n(\mathbb{F}_q)$，$Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$（其中$n=2\nu$是偶数），$U_n(\mathbb{F}_q)$（其中$q$是平方元），$O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$（其中$n=2\nu+\delta$，$\delta=0,1$或$2$），$Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$（其中$n=2\nu+\delta$，$\delta=1,2$，而$q$是偶数）. 规定$G_n$在$\mathbb{F}_q^{(n)}$上的作用如下：

$$\mathbb{F}_q^{(n)} \times G_n \longrightarrow \mathbb{F}_q^{(n)}$$
$$((x_1, x_2, \cdots, x_n), T) \longmapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n)T.$$

这个作用导出了$G_n$在$\mathbb{F}_q^{(n)}$的子空间集合上的作用，即如果$P$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$的一个$m$维子空间，那么通过$T \in G_n$可把$P$变成$m$维子空间$PT$. 于是$\mathbb{F}_q^{(n)}$的子空间集合在$G_n$的作用下，划分成一些轨道. 显然，$\{\{0\}\}$和$\{\mathbb{F}_q^{(n)}\}$是两个轨道，这是平凡的情形. 设$\mathscr{M}$是$G_n$作用下的任一个非平凡的轨道，那么$\mathscr{M}$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$中有限个$m$维$(0 < m < n)$子空间所成的集合. 将$\mathscr{M}$取作§2.2中的$\mathscr{A}$，就有

**定义2.3** 设$\mathscr{M}$是在给定的一个典型群$G_n$作用下的一个子空间轨道. 由$\mathscr{M}$生成格$\mathscr{L}(\mathscr{M})$，即$\mathscr{L}(\mathscr{M})$是$\mathscr{M}$中子空间交组成的集合，按子空间的反包含关系规定它的偏序，并约定$\mathbb{F}_q^{(n)}$是$\mathscr{M}$中零个子空间集的交. 那么$\mathscr{L}(\mathscr{M})$称为由**轨道$\mathscr{M}$生成的格**.

由定理2.5易知

**推论2.9** 格$\mathscr{L}(\mathscr{M})$是有限原子格，$\mathscr{M}$是它的原子集，而$\mathbb{F}_q^{(n)}$和$\bigcap_{X \in \mathscr{M}} X$分别是它的最小元和最大元. □

本书中，我们要讨论

(1) 对于给定的$G_n$，由各个轨道生成的格$\mathscr{L}(\mathscr{M})$之间的包含关系；

(2) 一个子空间是给定由$\mathscr{M}$生成的格$\mathscr{L}(\mathscr{M})$中一个元素的条件；

(3) 各个格 $\mathscr{L}(\mathscr{M})$的特征多项式.

(4) 按包含或反包含关系规定集合 $\mathscr{L}(m)$ 的序，何时$\mathscr{L}(m)$作成几何格.

## §2.4 一般线性群 $GL_n(\mathbb{F}_q)$作用下子空间轨道生成的格

我们先以 $G_n=GL_n(\mathbb{F}_q)$作为例子来讨论上节末尾提出的四个问题. 熟知，$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中所有 $m$ 维($0\leqslant m\leqslant n$)子空间作成 $GL_n(\mathbb{F}_q)$作用下的轨道，记作 $\mathscr{M}(m,n)$. 再把由 $\mathscr{M}(m,n)$生成的格记为 $\mathscr{L}(m,n)$.

**定义2.4** 几何格 $\mathscr{M}(m,n)$称为$GL_n(\mathbb{F}_q)$作用下**子空间轨道** $\mathscr{M}(m,n)$**生成的格**.

先讨论各个轨道生成的格 $\mathscr{L}(m,n)$之间的包含关系.

**定理2.10** 设 $n>m\geqslant 0$，那么

$$\mathscr{L}(m,n)\supset\mathscr{L}(m_1,n) \tag{2.2}$$

的充分必要条件是 $m\geqslant m_1\geqslant 0$.

**证明** 充要性. 当$n=1$时，(2.2)自然成立. 下面设$n\geqslant 2$. 我们先证明

$$\mathscr{L}(m,n)\supset\mathscr{L}(m-1,n). \tag{2.3}$$

为此，只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,n)\subset\mathscr{L}(m,n) \tag{2.4}$$

设 $P\in\mathscr{M}(m-1,n)$，$P$ 就是 $m-1$维子空间. 取 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1},v_m,v_{m+1},\cdots,v_n$ 是$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的一个基，其中 $v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}$是 $P$ 的一个基. 因为 $m<n$，所以$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中有两个不同的 $m$ 维子空间

$$\begin{pmatrix}P\\v_m\end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix}P\\v_{m+1}\end{pmatrix}$$

使得

$$P=\begin{pmatrix}P\\v_m\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}P\\v_{m+1}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(m,n).$$

因此(2.4)成立.

下面来证明(2.2). 当 $m=m_1$ 时,(2.2)自然成立. 下设 $m>m_1$. 由(2.3)可得

$$\mathscr{L}(m,n)\supset\mathscr{L}(m-1,n)\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1,n).$$

因而(2.2)成立.

必要性. 由 $\mathscr{M}(m_1,n)\subset\mathscr{L}(m_1,n)\subset\mathscr{L}(m,n)$,可知 $\mathscr{L}(m,n)$ 中含有一个 $m_1$ 维子空间 $Q$,而 $Q$ 是 $\mathscr{M}(m,n)$ 中 $m$ 维子空间的交. 所以,在 $\mathscr{L}(m,n)$ 中存在 $m$ 维子空间 $P$,使得 $P\supset Q$. 因此 $m\geqslant m_1\geqslant 0$. □

**推论2.11** 设 $n>m\geqslant 0$,那么

$$\{0\}\in\mathscr{L}(m,n).$$

因此 $\mathscr{L}(m,n)$ 的最大元是 $\bigcap_{X\in\mathscr{M}(m,n)}X=\{0\}$. □

现在来给出 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中一个子空间是 $\mathscr{L}(m,n)$ 中元素的条件.

**定理2.12** 设 $n>m\geqslant 0$,那么 $\mathscr{L}(m,n)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 和 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 中维数 $\leqslant m$ 的全体子空间组成.

**证明** 根据对格 $\mathscr{L}(m,n)$ 的约定,$\mathbb{F}_q^{(n)}\in\mathscr{L}(m,n)$. 因为 $\mathscr{L}(m,n)$ 中每个子空间是有限个 $m$ 维子空间的交. 所以,$\mathscr{L}(m,n)$ 中每个不等于 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的子空间的维数 $\leqslant m$. 反之,假设 $P$ 是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的 $k$ 维子空间,$0\leqslant k\leqslant m$. 那么 $P\in\mathscr{M}(k,n)\subset\mathscr{L}(k,n)$. 从定理2.10可得 $\mathscr{L}(k,n)\subset\mathscr{L}(m,n)$. 所以 $P\in\mathscr{L}(m,n)$. □

**推论2.13** 设 $n\geqslant 1$,如果按反包含关系规定集合 $\mathscr{L}(n-1,n)$ 的序,那么

$$\mathscr{L}(n-1,n)=\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q). \qquad \square$$

**定理2.14** 设 $n-2\geqslant m\geqslant 1$. 如果按包含关系来规定 $\mathscr{L}(m,n)$ 的偏序 $\geqslant$,那么 $\mathscr{L}(m,n)$ 是有限几何格.

**证明** 易知,如果按包含关系来规定 $\mathscr{L}(m,n)$ 的偏序 $\geqslant$,那么 $\mathscr{L}(m,n)$ 作成一个有限格. 下面证明命题1.30 中的 $G_2'$ 和 $G_3$ 成立. 对于 $U\in\mathscr{L}(m,n)$,由定理2.12,或者 $U=\mathbb{F}_q^{(n)}$,或者 $U$ 是 $\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的子空间而 $\dim U\leqslant m$. 设 $U\neq 0$,$\dim U=k$,那么 $k=n$ 或 $m\geqslant k>0$.

设 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_k$ 是 $U$ 的一个基, 由 $\{0\}\in\mathscr{L}(m,n)$,那么

$$\mathbb{F}_q x_1, \mathbb{F}_q x_2 \cdots, \mathbb{F}_q x_k$$

是 $\mathscr{L}(m,n)$的原子,并且

$$U = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{F}_q x_i = \bigvee_{i=1}^{k} \mathbb{F}_q x_i,$$

因此 $G_2'$成立.

因为$\{0\}\in\mathscr{L}(m,n)$,并且对于 $X\in\mathscr{L}(m,n)$,而 $X\neq\mathbb{F}_q^{(n)}$,以$\{0\}$为起点、$X$ 为终点的所有极大链

$$X_0 = \{0\} <\cdot X_1 <\cdot \cdots <\cdot X_p = X$$

满足

$$\dim X_{j+1} - \dim X_j = 1, j = 0,1,\cdots,p-1.$$

由定理2.6, $\mathscr{L}(m,n)$有秩函数 $r$, 使得

$$r(X) = \begin{cases} \dim X, \text{如果 } X \in \mathscr{L}(m,n), X \neq \mathbb{F}_q^{(n)}, \\ m+1, \text{如果 } X = \mathbb{F}_q^{(n)}. \end{cases}$$

任取$U$, $W\in\mathscr{L}$ ($m$, $n$), 那么$U\wedge W=U\cap W$ 和维数公式

$$\dim(\langle U,W\rangle) + \dim(U \wedge W) = \dim U + \dim W$$

成立, 如果$\dim$ ($\langle U, W\rangle$) $\leqslant m$, 那么$U\vee W=\langle U, W\rangle$; 如果$\dim$ ($\langle U, W\rangle$) $\geqslant m+1$, 那么$U\vee W=\mathbb{F}_q^{(n)}$, 并且$r$ ($U\vee W$) $=m+1\leqslant\dim(\langle U,W\rangle)$. 因而总有

$$r(U \vee W) + r(U \wedge W) \leqslant r(U) + r(W).$$

于是 $G_3$成立. □

**定理2.15** 设$1\leqslant m\leqslant n-1$. 如果按反包含关系规定$\mathscr{L}(m,n)$的偏序,

(i) $\mathscr{L}(1,n)$是有限几何格;

(ii) $\mathscr{L}(n-1,n)$是有限几何格;

(iii) 对于$2\leqslant m\leqslant n-2$, $\mathscr{L}(m,n)$是有限格,但它不是几何格.

**证明** (i)是显然的. (ii)由定理2.8得到, 下面证明 (iii). 显然, $\mathscr{L}(m,n)$是有限格,对于$X\in\mathscr{L}(m,n)$, $\mathscr{L}(m,n)$中以$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 为起点, $X$ 为终点的任一极大链

$$\mathbb{F}_q^{(n)} = X_0 <\cdot X_m <\cdot X_{m-1} <\cdot \cdots <\cdot X_p = X$$

都满足

$$\dim X_{i+1} - \dim X_i = 1$$

和

$$X_m \in \mathscr{M}(m,n),$$

其中$i=p$，$p+1$，…，$m-1$. 由定理2.6，$\mathscr{L}(m,n)$有秩函数$r$，使得

$$r(X) = \begin{cases} m+1-\dim X, & \text{如果 } X \in \mathscr{L}(m,n), X \neq \mathbb{F}_q^{(n)}, \\ 0, & \text{如果 } X = \mathbb{F}_q^{(n)}. \end{cases}$$

设$x_1$，$x_2$，…，$x_n$是$\mathbb{F}_q^{(n)}$的一个基，因为$2 \leqslant m \leqslant n-2$. 可令

$$U = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{F}_q x_i, W = \sum_{i=3}^{m+2} \mathbb{F}_q x_i.$$

那么

$$U, W \in \mathscr{M}(m,n) \subset \mathscr{L}(m,n).$$

于是

$$U \vee W = \sum_{i=3}^{m} \mathbb{F}_q x_i, U \wedge W = \mathbb{F}_q^{(m)}.$$

因此

$$r(U \wedge W) + r(U \vee W) > r(U) + r(W).$$

根据命题1.30，对于$2 \leqslant m \leqslant n-2$，$\mathscr{L}(m,n)$不是几何格. □

下面给出子空间轨道$\mathscr{M}(m,n)$生成格$\mathscr{L}(m,n)$的特征多项式.

**定理2.16** 设$n > m \geqslant 0$，那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,n),t) = \sum_{k=m+1}^{n} N(k,n) g_k(t),$$

其中

$$N(k,n) = |\mathscr{M}(k,n)| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{k}(q^i-1)} \tag{2.5}$$

是$\mathbb{F}_q^{(n)}$中$k$维子空间的个数，而$g_k(x)$是Gauss多项式.

**证明** 为了书写简单，记$V = \mathbb{F}_q^{(n)}$，$\mathscr{L} = \mathscr{L}(m,n)$和$\mathscr{L}_0 =$

$\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$. 对于 $P\in\mathscr{L}$，规定

$$\mathscr{L}^P=\{Q\in\mathscr{L}\mid Q\subset P\}=\{Q\in\mathscr{L}\mid Q\geqslant P\}\text{ 和}$$
$$\mathscr{L}_0^P=\{Q\in\mathscr{L}_0\mid Q\subset P\}=\{Q\in\mathscr{L}_0\mid Q\geqslant P\}.$$

显然，$\mathscr{L}^V=\mathscr{L}$. 对于 $P\in\mathscr{L}$，$P\neq V$，根据命题2.12，有 $\mathscr{L}^P=\mathscr{L}_0^P$. 任取 $P\in\mathscr{L}_0$. 由命题2.4，有 $\chi(\mathscr{L}_0^P,t)=g_{\dim P}(t)$. 注意到 $P$ 的秩是 $r(P)=n-\dim P$. 即 $\mathscr{L}^V$ 上有秩函数 $r$，而 $\mathscr{L}^V$ 是有最大元$\{0\}$和最小元$\mathbb{F}_q^{(n)}$ 的格，所以

$$\chi(\mathscr{L}^V,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}^V}\mu(V,P)t^{r(0)-r(P)}=\sum_{P\in\mathscr{L}^V}\mu(V,P)t^{\dim P}.$$

把 $t$ 看作已知数，把命题1.5(1.7)式左边的 $f(x)$ 取为 $f(V)=\chi(\mathscr{L}^V,t)$，而(1.7)式右边的 $g(y)$ 取为 $g(P)=t^{\dim P}$. 利用命题1.5 (Möbius 反演公式)，可得

$$t^n=t^{\dim V}=\sum_{P\in\mathscr{L}^V}\chi(\mathscr{L}^P,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}}\chi(\mathscr{L}^P,t).$$

同样，又有

$$t^n=\sum_{P\in\mathscr{L}_0}\chi(\mathscr{L}_0^P,t).$$

根据定理2.12可知$\{P\in\mathscr{L}_0\mid\dim P\leqslant m\}=\{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}\}$. 于是

$$\begin{aligned}
\chi(\mathscr{L},t)=\chi(\mathscr{L}^V,t)&=t^n-\sum_{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}^P,t)\\
&=\sum_{P\in\mathscr{L}_0}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)-\sum_{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}^P,t)\\
&=\sum_{P\in\mathscr{L}_0,\dim P>m}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)+\sum_{P\in\mathscr{L}_0,\dim P\leqslant m}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)\\
&\quad-\sum_{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}^P,t)\\
&=\sum_{P\in\mathscr{L}_0,\dim P>m}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)+\sum_{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}^P,t)\\
&\quad-\sum_{P\in\mathscr{L}\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}^P,t)\\
&=\sum_{k=m+1}^{n}N(k,n)g_k(t),
\end{aligned}$$

其中 $N(k,t)$ 的表示式由(2.5)给出(具体算法见文献[28]或[32]).

## §2.5 注记

本章的编写中，参考了文献[2]，[12]和[28].定理2.10的充分性，推论2.11，定理2.12，推论2.13和定理2.16都取自文献[12].

本章主要参考资料有：参考文献[2]，[12]和[28].

# 第三章　辛群作用下子空间轨道生成的格

## §3.1　辛群 $Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$作用下子空间轨道生成的格

在本章中我们假定 $n=2\nu$，而 $\nu$ 是正整数. 设 $K$ 是$\mathbb{F}_q$上$2\nu$ 级交错矩阵，

$$K=\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ -I^{(\nu)} & 0 \end{bmatrix}.$$

**定义3.1**　$\mathbb{F}_q$上满足

$$TK{}^tT=K$$

的全体$2\nu$ 级矩阵 $T$ 对矩阵乘法作成一个群，称为$\mathbb{F}_q$ **上的$2\nu$ 级辛群**，记作 $Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$.

$2\nu$ 维行空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 与辛群在它上面的作用(见§2.3)一起称为$\mathbb{F}_q$**上的$2\nu$ 维辛空间**.

在$2\nu$ 维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中，一个 $m$ 维子空间 $P$ 说成关于 $K$ 是$(m,s)$型的，简单说成$(m,s)$型的，如果矩阵 $PK{}^tP$ 的秩是$2s$. 这时把 $s$ 叫做 $P$ 的指数. 由文献[28]可知，$(m,s)$型子空间存在，当且仅当

$$2s\leqslant m\leqslant \nu+s. \tag{3.1}$$

我们用$\mathscr{M}(m,s;2\nu)$表示$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中全体$(m,s)$型子空间所成的集合. 易知(见[28]中定理3.7)$\mathscr{M}(m,s;2\nu)$是辛群 $Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$作用下的轨道. 再用$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$表示由轨道 $\mathscr{M}(m,s;2\nu)$生成的格.

**定义3.2**　格 $\mathscr{L}(m,s;2\nu)$称为辛群 $Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$作用下**子空间轨道** $\mathscr{M}(m,s;2\nu)$**生成的格**.

由推论2.9，可得

**定理3.1**　设$2s\leqslant m\leqslant \nu+s$，那么$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$是有限原子格，

$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 和 $\bigcap_{X\in \mathscr{M}(m,s;2\nu)} X$ 分别是它的最小元和最大元，而 $\mathscr{M}(m,s;2\nu)$ 是它的原子集. □

## §3.2 若干引理

**引理3.2** 设 $n=2\nu\geqslant 2$，$(m,s)$ 满足(3.1)

$$2s\leqslant m\leqslant \nu+s$$

和 $m\neq 2\nu$. 如果 $m\geqslant 1$，那么

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu)\supset \mathscr{L}(m-1,s;2\nu).$$

**证明** 如果 $m-2s=0$. 那么 $m-1<2s$，即(3.1)不成立，于是 $\mathscr{M}(m,s;2\nu)=\phi$. 因而

$$\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)=\{\mathbb{F}_q^{(2\nu)}\}\subset \mathscr{L}(m,s;2\nu).$$

现在假设 $m-2s>0$，这时 $\mathscr{M}(m-1,s;2\nu)\neq\phi$，于是只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,s;2\nu)\subset \mathscr{L}(m,s;2\nu). \tag{3.2}$$

设 $P\in \mathscr{M}(m-1,s;2\nu)$，不妨设

$$PK'P=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ -I^{(s)} & 0 & \\ & & 0^{(\sigma)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma=m-1-2s$. 由[28]中引理3.5的证明可知，存在 $\sigma\times 2\nu$ 矩阵 $X$ 和 $2(\nu-\sigma-s)\times 2\nu$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

是非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & \\ -I^{(s)} & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma)} & & \\ & & -I^{(\sigma)} & 0 & & \\ & & & & 0 & I^{(\nu-\sigma-s)} \\ & & & & -I^{(\nu-\sigma-s)} & 0 \end{bmatrix}.$$

因为$\nu+s-m\geqslant 0$. 所以$2(\nu-\sigma-s)=2(\nu-s-m)+2\geqslant 2$，即 $\dim Y=2$. 设 $y_1$和 $y_2$分别是 $Y$ 的第一和第二行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_i \end{bmatrix} K {}^t\begin{bmatrix} P \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ -I^{(s)} & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} (i=1,2).$$

因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_i \end{bmatrix} \in \mathscr{M}(m,s;2\nu).$$

于是

$$P = \begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,s;2\nu).$$

因此(3.2)成立. □

**引理3.3** 设$n=2\nu\geqslant 2$，$(m,\ s)$ 满足(3.1)

$$2s \leqslant m \leqslant \nu+s$$

和 $m\neq 2\nu$. 如果$s\geqslant 1$，那么

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu) \supset \mathscr{L}(m-1,s-1;2\nu).$$

**证明** 由$s\geqslant 1$和(3.1)成立，有$2(s-1)\leqslant m-1\leqslant \nu+(s-1)$. 所以$\mathscr{M}(m-1,s-1;2\nu)\neq\phi$，我们只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,s-1;2\nu) \subset \mathscr{L}(m,s;2\nu). \tag{3.4}$$

设$P\in\mathscr{M}(m-1,s-1;2\nu)$，不妨取

$$PK{}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & \\ -I^{(s-1)} & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s+1\geqslant 1$，于是存在$\sigma_1\times 2\nu$矩阵$X$和$2(\nu-\sigma_1-s+1)\times 2\nu$矩阵$Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} K {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu-1)} & & & & \\ -I^{(\nu-1)} & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & -I^{(\sigma_1)} & 0 & & \\ & & & & 0 & I^{(\nu-\sigma_1-s+1)} \\ & & & & -I^{(\nu-\sigma_1-s+1)} & 0 \end{bmatrix}.
$$

我们分 $\sigma_1 \geqslant 2$ 和 $\sigma_1 = 1$ 两种情形.

先考虑 $\sigma_1 \geqslant 2$ 的情形. 设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别是 $X$ 的第一和第二行，那么

$$
\begin{bmatrix} P \\ x_i \end{bmatrix}, i = 1, 2,
$$

都是$(m,s)$型子空间，因而有

$$
P = \begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m, s; 2\nu).
$$

其次考虑 $\sigma_1 = 1$ 的情形. 这时 $m = 2s$. 由假设 $m \neq 2\nu$，所以 $s \neq \nu$ 和 $\nu - \sigma_1 - s + 1 = \nu - s > 0$. 设 $y$ 是 $Y$ 中的第一行，那么

$$
\begin{bmatrix} P \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ X + y \end{bmatrix} \in \mathscr{M}(m, s; 2\nu).
$$

因而

$$
P = \begin{bmatrix} P \\ X \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ X + y \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m, s; 2\nu).
$$

因此(3.4)成立. □

## § 3.3 各轨道生成格之间的包含关系

**定理3.4** 设 $n = 2\nu \geqslant 2$，$(m, s)$，$(m_1, s_1)$都满足(3.1)，即

$$
2s \leqslant m \leqslant \nu + s, 2s_1 \leqslant m_1 \leqslant \nu + s_1
$$

和 $m\neq 2\nu$. 那么

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu)\supset\mathscr{L}(m_1,s_1;2\nu) \tag{3.5}$$

的充分必要条件是

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0. \tag{3.6}$$

**证明** 充分性. 设非负整数对$(m_1,s_1)$满足(3.1)和$m-m_1\geqslant s-s\geqslant 0$. 自然有$\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)\neq\phi$. 令$s-s_1=t$, $m-m_1=t+t'$,那么$t,t'\geqslant 0$. 根据引理3.3, 有

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu)\supset\mathscr{L}(m-1,s-1;2\nu)$$
$$\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m-t,s-t;2\nu)=\mathscr{L}(m_1+t',s_1;2\nu).$$

如果$t'=0$,那么

$$\mathscr{L}(m_1+t',s_1;2\nu)=\mathscr{L}(m_1,s_1;2\nu).$$

于是(3.5)成立. 如果$t'>0$, 那么从引理3.2可得

$$\mathscr{L}(m_1+t',s_1;2\nu)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,s_1;2\nu)$$
$$\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1,s_1;2\nu).$$

因而(3.5)也成立.

必要性. 由$(m_1,s_1)$满足(3.1)、可知$\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)\neq\phi$. 再从$\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)\subset\mathscr{L}(m_1,s_1;2\nu)$和$\mathscr{L}(m_1,s_1;2\nu)\subset\mathscr{L}(m,s;2\nu)$,有$\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)\subset\mathscr{L}(m,s;2\nu)$. 对于任意$Q\in\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)\subset\mathscr{L}(m,s;2\nu)$、那么$Q\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$,$Q$一定是$\mathscr{M}(m,s;2\nu)$中的子空间的交. 因而存在$P\in\mathscr{M}(m,s;2\nu)$,使$Q\subset P$. 因$P$的维数和指数分别是$m$和$s$, 而$Q$的维数和指数分别是$m_1$和$s_1$, 所以$m\geqslant m_1$,$s\geqslant s_1$. 如果$m=m_1$,那么$P=Q$和$s=s_1$. 于是(3.6)成立. 现在假设$m>m_1$,令$m_1=m-t$,$t\geqslant 0$. 由$P$的指数是$s$,可知$Q$的指数$\geqslant s-t$. 于是$s_1\geqslant s-t$. 从而有$m-m_1=t\geqslant s-s_1$. 因此(3.6)也成立. □

## §3.4 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的子空间在$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$中的条件

**定理3.5** 设$n=2\nu\geqslant 2$,$(m,s)$满足(3.1)

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s$$

和$m\neq 2\nu$. 那么$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$和所有$(m_1,s_1)$型子空间组成,

其中$(m_1,s_1)$满足(3.6)

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 0.$$

**证明** 我们已约定$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$是$\mathcal{M}(m,s;2\nu)$中零个子空间的交，所以$\mathbb{F}_q^{(2\nu)} \in \mathcal{L}(m,s;2\nu)$. 设$Q$是$(m_1,s_1)$型子空间，$(m_1,s_1)$满足(3.6)，那么

$$Q \in \mathcal{M}(m_1,s_1;2\nu) \subset \mathcal{L}(m_1,s_1;2\nu) \subset \mathcal{L}(m_1,s;2\nu).$$

其中后一个包含关系可以从定理3.4得到.

反之，假设$Q \in \mathcal{L}(m,s;2\nu)$,$Q \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu)}$,并且$Q$是$(m_1,s_1)$型子空间. 因为$Q$是$\mathcal{M}(m,s;2\nu)$中子空间的交，所以存在$P \in \mathcal{M}(m,s;2\nu)$，使得$P \supset Q$. 从定理3.4必要性的证明，可知(3.6)成立.

□

**推论3.6** 设$n=2\nu \geqslant 2$,$(m,s)$满足(3.1)

$$2s \leqslant m \leqslant \nu + s$$

和$m \neq 2\nu$. 那么

$$\{0\} \in \mathcal{L}(m,s;2\nu),$$

并且$\{0\} = \bigcap_{X \in \mathcal{M}(m,s;2\nu)} X$是$\mathcal{L}(m,s;2\nu)$的最大元. □

从定理3.5的证明可得

**推论3.7** 设$n=2\nu \geqslant 2$,$(m,s)$满足(3.1). 如果$P \in \mathcal{L}(m,s;2\nu)$,$P \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu)}$,而$Q$是包含在$P$中的子空间,那么$Q \in \mathcal{L}(m,s;2\nu)$. □

**推论3.8** 设$n=2\nu \geqslant 2$. 那么$\mathcal{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu)=\mathcal{L}(n,\mathbb{F}_q)$.

**证明** 显然，$\mathcal{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu) \subset \mathcal{L}(n,\mathbb{F}_q)$. 设$P \in \mathcal{L}(n,\mathbb{F}_q)$. 如果$P=\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，那么根据我们的约定，$\mathbb{F}_q^{(2\nu)} \in \mathcal{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu)$. 现在设$P \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu)}$,而$P$是$(m,s)$型子空间，那么$2s \leqslant m \leqslant \nu+s$. 从而$m \leqslant 2\nu-1$和$s \leqslant \nu-1$. 而$\nu-m \geqslant -s$,所以$(2\nu-1)-m \geqslant (\nu-1)-s \geqslant 0$. 从定理3.5可得$P \in \mathcal{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu)$. 因此$\mathcal{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu)=\mathcal{L}(n,\mathbb{F}_q)$. □

**定理3.9** 设$2s \leqslant m \leqslant \nu+s$，$1 \leqslant m \leqslant 2\nu-2$. 如果按包含关系来规定集合$\mathcal{L}(m,s;2\nu)$的偏序，那么$\mathcal{L}(m,s;2\nu)$是有限几何格.

**证明** 易知，$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$是一个有限格，下面证明它是几何格.

对于$U\in\mathscr{L}(m,s;2\nu)$，由定理3.5，或者$U=\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，或者$U$是$(m_1,s_1)$型子空间. 而$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0$. 假设$U$不等于$\{0\}$和$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，而$U={}^t(u_1,u_2\cdots u_{m_1})$使得

$$UK{}^tU=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ -I^{(s_1)} & 0 & \\ & & 0^{(m_1-2s_1)} \end{bmatrix}.$$

因为$\{0\}\in\mathscr{L}(m,s;2\nu)$，而由定理3.5，$\mathbb{F}_qu_i\in\mathscr{L}(m,s;2\nu)$，$i=1,2,\cdots m_1$，所以$\mathbb{F}_qu_i$是$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$的原子，并且$U=\bigvee\limits_{i=1}^{m_1}\mathbb{F}_qu_i$. 在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中取第$i$个分量为1，而其余分量为0的向量$e_i$，$i=1,2,\cdots,2\nu$，那么$\mathbb{F}_qe_i$同样也是$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$的原子. 并且$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}=\bigvee\limits_{i=1}^{2\nu}\mathbb{F}_qe_i$. 因而$\mathscr{L}(m,s;2\nu)\setminus\{0\}$中的每个元素是它原子的并，即$G_2'$成立.

对于$X\in\mathscr{L}(m,s;2\nu)\setminus\{\mathbb{F}_q^{(2\nu)}\}$，设$X$是$(m_1,s_1)$型子空间，沿用上一段的记号，令

$$X_i=\sum_{j=1}^{i}\mathbb{F}_qx_j,\ i=1,2\cdots,m_1,$$

则

$$\{0\}<\cdot X_1<\cdot X_2<\cdot\cdots<\cdot X_{m_1}=X$$

是$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$中以$\{0\}$为起点，而以$X$为终点的极大链，满足

$$\dim X_{i+1}-\dim X_i=1,\ i=0,1\cdots,m_1-1,$$

且任一个$\{0\}$，$X$极大链都如此. 由定理2.6，$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$有秩函数$r$，使得

$$r(X)=\begin{cases}\dim X,\text{如果 } X\in\mathscr{L}(m,s;2\nu),X\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu)},\\ m+1,\text{如果 } X=\mathbb{F}_q^{(2\nu)}.\end{cases}$$

按照定理2.14证明中相应步骤推导，可知$G_3$成立. □

**定理3.10** 设$2s\leqslant m\leqslant\nu+s$，$1\leqslant m\leqslant 2\nu-1$. 如果按反包含关系规定集合$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$的偏序，那么

(i) $\mathscr{L}(1,0;2\nu)$是有限几何格；

(ii) $\mathscr{L}(2\nu-1,\nu-1;2\nu)$是有限几何格；

(iii) 对于$2\leqslant m\leqslant 2\nu-2$，$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$是有限原子格，但它不是几何格.

**证明** (i)显然成立.(ii)由定理2.8得到.现在来证明(iii).

由定理2.5和定理2.8的证明，可知$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$是有限原子格. 仿照定理2.15的证明，$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$有秩函数$r$，使得对于$X\in\mathscr{L}(m,s;2\nu)$，$X\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，有$r(X)=\dim X$，而$r(\mathbb{F}_q^{(2\nu)})=0$. 设$U\in\mathscr{M}(m,2s;2\nu)$，而$U=(u_1\ v_1\ u_2\ v_2\cdots u_s\ v_s\ u_{s+1}\cdots u_{m-s})$使得

$$UK{}^tU=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & -1 & 0 & \\ & & & & & & & 0^{(m-2s)} \end{bmatrix}.$$

从$m\leqslant 2\nu-2$得到$s\leqslant\nu-1$. 由[28]中引理3.5的证明，存在

$$Z=(v_{s+1}\cdots v_{m-s}\ u_{m-s+1}\ v_{m-s+1}\cdots u_\nu\ v_\nu),$$

使得

$$\begin{bmatrix} U \\ Z \end{bmatrix} K\,{}^t\begin{bmatrix} U \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令

$$W={}^t(v_{\nu-m+s+1}\cdots v_{\nu-s}\ u_{\nu-s+1}\ v_{\nu-s+1}\cdots u_\nu\ v_\nu),$$

那么$W$ 是$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的（$m$，$s$）型子空间，因而

$$W \in \mathscr{L}(m,s;2\nu).$$

因为

$$2 \leqslant m \leqslant 2\nu - 2,$$

所以

$$\dim(\langle U,W\rangle) \geqslant m + 2.$$

于是

$$\langle U,W\rangle \subset U \wedge W = \mathbb{F}_q^{(2\nu)}.$$

显然，

$$U \vee W = U \cap W.$$

由维数公式得

$$r(U \wedge W) + r(U \vee W) > r(U) + r(W).$$

由命题1.30；对于$2\leqslant m\leqslant 2\nu-2$，$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$不是几何格. □

## §3.5 格$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$的特征多项式

**定理3.11** 设$n=2\nu\geqslant 2$，$(m,s)$满足(3.1)和$m\neq 2\nu$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,s;2\nu),t) = \sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1} N(m_1,s_1;2\nu)g_{m_1}(t) + \sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{\nu+s_1} N(m_1,s_1;2\nu)g_{m_1}(t), \tag{3.7}$$

其中$g_{m_1}(t)=(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{m_1-1})$是Gauss 多项式，而$N(m_1,s_1;2\nu)=|\mathscr{M}(m_1,s_1;2\nu)|$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中$(m_1,s_1)$型子空间的个数.

**证明** 为了书写简单起见，记$V=\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，$\mathscr{L}_1=\mathscr{L}(m,s;2\nu)$和$\mathscr{L}_0=\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$. 对于$P\in\mathscr{L}_1$，我们规定

$$\mathscr{L}_1^P = \{Q \in \mathscr{L}_1 | Q \subset P\} = \{Q \in \mathscr{L}_1 | Q \geqslant P\}.$$

显然，$\mathscr{L}_1^V=\mathscr{L}_1$. 由推论3.7，有$\mathscr{L}_1^P=\mathscr{L}_0^P$. 对特征多项式

$$\chi(\mathscr{L}_1^V,t)=\chi(\mathscr{L}_1,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}_1}\mu(V,P)t^{\dim P}$$

和

$$\chi(\mathscr{L}_0^V,t)=\chi(\mathscr{L}_0,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}_0}\mu(V,P)t^{\dim P}.$$

使用 Mobius 反演，分别有

$$t^{2\nu}=t^{\dim V}=\sum_{P\in\mathscr{L}_1^V}\chi(\mathscr{L}_1^P,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}_1}\chi(\mathscr{L}_1^P,t)$$

和

$$t^{2\nu}=t^{\dim V}=\sum_{P\in\mathscr{L}_0^V}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)=\sum_{P\in\mathscr{L}_0}\chi(\mathscr{L}_0^P,t).$$

于是

$$\begin{aligned}\chi(\mathscr{L}_1,t)=\chi(\mathscr{L}_1^V,t)&=t^{2\nu}-\sum_{P\in\mathscr{L}_1\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}_1^P,t)\\&=\sum_{P\in\mathscr{L}_0}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)-\sum_{P\in\mathscr{L}_1\setminus\{V\}}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)\\&\quad-\sum_{P\in\mathscr{L}_0\setminus\mathscr{L}_1\text{或}P=V}\chi(\mathscr{L}_0^P,t).\end{aligned}\tag{3.8}$$

由命题3.6，$X\in(\mathscr{L}_0\setminus\mathscr{L}_1\cup\{V\})$ 当且仅当 $\{X\in\mathscr{L}_0\mid X$ 是 $(m_1,s_1)$ 型子空间，$s-s_1<0\}\cup\{X\in\mathscr{L}_0\mid X$ 是 $(m_1,s_1)$ 型子空间，$s-s_1\geqslant 0$，$m-m_1<s-s_1\}$. 因而

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathscr{L}_0\setminus\mathscr{L}_1\text{或}P=V}\chi(\mathscr{L}_0^P,t)&=\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1}N(m_1,s_1;2\nu)\chi(\mathscr{L}_0^P,t)\\&\quad+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{\nu+s_1}N(m_1,s_1;2\nu)\chi(\mathscr{L}_0^P,t),\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $\dim P=m_1$. 根据命题1.18，有

$$\chi(\mathscr{L}_0^P,t)=g_{m_1}(t).\tag{3.10}$$

从(3.8)，(3.9)和(3.10)可得(3.7). □

应注意：对于 $N(m_1,s_1;2\nu)$ 的准确表示公式，可见文献［28］的定理3.18.

**推论3.12** 设 $n=2\nu\geqslant 2$，那么

$$\begin{aligned}\chi(\mathscr{L}(2\nu-2,\nu-1;2\nu),t)&=\sum_{s_1=0}^{\nu}N(\nu+s_1,s_1;2\nu)g_{\nu+s_1}(t)\\&=\sum_{k=\nu}^{2\nu}N(k,k-\nu;2\nu)g_k(t).\end{aligned}$$ □

由推论3.12又可得

**推论3.13** 设 $n=2\nu\geqslant 2$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(2\nu-2,\nu-1;2\nu),t)=g_\nu(t)\gamma(t),$$

其中 $\gamma(t)\in\mathbb{Z}[t]$ 是首一多项式. □

## §3.6 注记

本章主要根据参考文献［12］编写，引理3.2,引理3.3,定理3.4的充分性,定理3.5,定理3.11和推论3.8均取自该文. 推论3.12是参考文献［4］的结果.

本章主要参考资料有：参考文献［4］,［12］和［28］.

# 第四章　酉群作用下子空间轨道生成的格

## §4.1　酉群 $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$ 作用下子空间轨道生成的格

本章中所讨论的域是含有 $q^2$ 个元素的有限域 $\mathbb{F}_{q^2}$，其中 $q$ 是素数幂. $\mathbb{F}_{q^2}$ 有一个对合自同构

$$a \longmapsto \bar{a} = a^q, \tag{4.1}$$

它的固定子域是含 $q$ 个元素的有限域 $\mathbb{F}_q$. 设 $n$ 是一个正整数，而 $\bar{T}$ 是 $n$ 级矩阵，它的元素是 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上 $n$ 级矩阵 $T$ 中相应元素在对合自同构(4.1)下的象.

**定义4.1**　$\mathbb{F}_{q^2}$ 上满足

$$T{}^t\bar{T} = I^{(n)}$$

的全体 $n$ 级矩阵 $T$ 对矩阵的乘法作成一个群，称为 **$\mathbb{F}_{q^2}$ 上的 $n$ 级酉群**，记作 $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

$n$ 维行向量空间 $\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$ 与酉群 $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$ 在它上的作用一起(见§2.3)称为 **$\mathbb{F}_{q^2}$ 上的 $n$ 维酉空间**.

由文献［28］的推论5.4可知，下列的命题成立.

**命题4.1**　$\mathbb{F}_{q^2}$ 上的 $n\times n$ 单位矩阵 $I^{(n)}$ 合同于

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{bmatrix}, 如果 n = 2\nu,$$

或

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} & \\ I^{(\nu)} & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, 如果 n = 2\nu + 1,$$

其中 $\nu$ 是非负整数，称为 $H_0$ 和 $H_1$ 的**指数**. 有时为了统一讨论这两

种情形，记$n=2\nu+\delta$，而$\delta=0$或1，相应地把$H_0$和$H_1$统一地记为$H_\delta$.

在$n$维酉空间$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$中，一个$m$维子空间$P$说成是$(m,r)$型的，如果矩阵$P^tP$的秩是$r$，$r$叫做$P$的秩. 由文献［28］中的定理5.7可知，$(m,r)$型子空间存在当且仅当

$$2r \leqslant 2m \leqslant n+r. \tag{4.2}$$

我们用$\mathscr{M}(m,r;n)$表示$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$中全体$(m,r)$型子空间所成的集合. 易知（见［28］的定理5.8），$\mathscr{M}(m,r;n)$是$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$的子空间集在酉群$U_n(\mathbb{F}_{q^2})$作用下的轨道. 再用$\mathscr{L}(m,r;n)$表示由轨道$\mathscr{M}(m,r;n)$生成的格.

**定义4.2** 格$\mathscr{L}(m,r;n)$称为酉群$U_n(\mathbb{F}_{q^2})$作用下**子空间轨道**$\mathscr{M}(m,r;n)$**生成的格**.

由推论2.9，可得

**定理4.2** 设$2r\leqslant 2m\leqslant n+r$，$m\neq n$. 那么$\mathscr{L}(m,r;n)$是有限原子格，$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$和$\bigcap_{X\in\mathscr{M}(m,r;n)} X$分别是它的最小元和最大元，而$\mathscr{M}(m,r;n)$是它的原子集.

## §4.2 若干引理

**引理4.3** 设$n\geqslant 1$，$(m,r)$满足(4.2)

$$2r \leqslant 2m \leqslant n+r$$

和$m\neq n$，如果$m\geqslant 1$，那么

$$\mathscr{L}(m,r;n) \supset \mathscr{L}(m-1,r;n).$$

**证明** 如果$m-r=0$，那么$2(m-1)<2r$. 于是$\mathscr{M}(m-1,r;n)=\phi$. 因而

$$\mathscr{L}(m-1,r;n)=\{\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}\}\subset\mathscr{L}(m,r;n).$$

现在假设$m-r>0$，这时$2r\leqslant 2(m-1)\leqslant n+r$. 因而$\mathscr{M}(m-1,r;n)\neq\phi$. 于是只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,r;n)\subset\mathscr{L}(m,r;n). \tag{4.3}$$

令 $P\in\mathcal{M}(m-1,r;n)$，不妨设

$$P^t\overline{P}=\begin{bmatrix}I^{(r)} & \\ & 0\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma=m-r-1$. 由文献[28]中的引理5.6的证明可知，存在 $\sigma\times n$ 矩阵 $X$ 和 $(n-r-2\sigma)\times n$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

是非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}^t\overline{\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}I^{(r)} & & & \\ & 0 & I^{(\sigma)} & \\ & I^{(\sigma)} & 0 & \\ & & & I^{(n-r-2\sigma)}\end{bmatrix}.$$

因为 $n+r\geqslant 2m$，所以

$$n-r-2\sigma=n+r-2m+2\geqslant 2,$$

即 $\dim Y\geqslant 2$. 根据命题4.1，存在 $(n-r-2\sigma)\times(n-r-2\sigma)$ 矩阵 $Q$，使得

$$Q(Y^t\overline{Y})^t\overline{Q}=\begin{bmatrix}0 & I^{(\nu_1)}\\ I^{(\nu_1)} & 0\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}0 & I^{(\nu_1)} & \\ I^{(\nu_1)} & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

设 $y_1$ 和 $y_2$ 是 $QY$ 的第1和第 $\nu_1+1$ 行，那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_i\end{bmatrix}^t\overline{\begin{bmatrix}P\\y_i\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}I^{(r)} & \\ & 0^{(\sigma+1)}\end{bmatrix},i=1,2.$$

因而

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathcal{L}(m,r;n).$$

于是(4.3)成立. □

**引理4.4** 设 $n\geqslant 1$，$(m,r)$ 满足(4.2)

$$2r \leqslant 2m \leqslant n + r$$

和 $m \neq n$. 如果 $r \geqslant 2$，那么

$$\mathscr{L}(m,r;n) \supset \mathscr{L}(m-1, r-2; n). \tag{4.5}$$

**证明** 由(4.2)可知，$2(r-2) \leqslant 2(m-1) \leqslant n+(r-2)$，所以 $\mathscr{M}(m,r;n) \neq \phi$. 令 $P \in \mathscr{M}(m-1, r-2; n)$. 不妨设

$$P^{\prime} P = \begin{bmatrix} I^{(r-2)} & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 = m - r + 1$. 那么存在 $\sigma_1 \times n$ 矩阵 $X$ 和 $(n - 2\sigma_1 - r + 2) \times n$ 矩阵 $Y$，使得(4.4)是非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}^{\prime} \begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(r-2)} & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & I^{(n-2\sigma_1-r+2)} \end{bmatrix}.$$

如果 $m - r = 0$，那么 $\sigma_1 = m - r + 1 = 1$，即 $X$ 是 $\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$ 的1维子空间. 从 $m \neq n$ 可得 $r < n$. 于是 $n - 2\sigma_1 - r + 2 = n - r \geqslant 1$. 设 $y$ 是 $Y$ 的第一行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ X \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ X + y \end{bmatrix}$$

是 $(m,r)$ 型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ X \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ X + y \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,r;n).$$

现在假设 $m - r > 0$，那么 $m - r + 1 \geqslant 2$. 令 $x_1$ 和 $x_2$ 分别是 $X$ 的第一和第二行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix}$$

是 $(m,r)$ 型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,r;n).$$

因此(4.5)成立. □

**引理4.5** 设$n\geqslant 1$, $(m, r)$ 满足

$$2r \leqslant 2m < n + r \tag{4.6}$$

和$m\neq n$, 如果$r\geqslant 1$, 那么

$$\mathscr{L}(m,r;n) \supset \mathscr{L}(m-1,r-1;n). \tag{4.7}$$

**证明** 由(4.6)可知, $2(r-1)\leqslant 2(m-1)\leqslant n+r-1$. 所以 $\mathscr{M}(m-1,r-1;n)\neq\phi$. 令$P\in\mathscr{M}(m-1,r-1;n)$, 不妨设

$$P^{t}\overline{P} = \begin{bmatrix} I^{(r-1)} & \\ & 0^{(\sigma_2)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_2=m-r$. 那么存在$\sigma_2\times n$矩阵$X$和$(n-2\sigma_2-r+1)\times n$矩阵$Y$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}^{t}\overline{\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} I^{(r-1)} & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & & I^{(n-2\sigma_2-r+1)} \end{bmatrix}.$$

因为$2m<n+r$, 所以$n-2\sigma_2-r+1=n+r-2m+1\geqslant 2$. 设$y_1$和$y_2$是$Y$的第一和第二行, 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是$(m,r)$型子空间. 因而

$$P = \begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,r;n).$$

因此(4.7)成立. □

## §4.3 各轨道生成格之间的包含关系

**定理4.6** 设$n\geqslant 1$, $(m,r)$和$(m_1,r_1)$都满足(4.2), 而在

$$2r \leqslant 2m = n + r \tag{4.8}$$

成立时, 对于$0\leqslant t\leqslant\left[\frac{r-1}{2}\right]$的整数$t$, $(m_1,r_1)\neq(m-t-1,r-2t-$

1). 那么

$$\mathscr{L}(m,r;n) \supset \mathscr{L}(m_1,r_1;n) \tag{4.9}$$

的充分必要条件是

$$2m - 2m_1 \geqslant r - r_1 \geqslant 0. \tag{4.10}$$

**证明** 首先断言：在(4.2)和$(m_1,r_1)=(m-t-1,r-2t-1)$成立的条件下，(4.8)和

$$2(r_1+1) \leqslant 2(m_1+1) = n + r_1 + 1 \tag{4.11}$$

等价. 事实上，假设(4.11)成立. 由

$$(m_1,r_1) = (m-t-1, r-2t-1),$$

有

$$2(m-t-1+1) = n + r - 2t - 1 + 1,$$

即

$$2m = n + r.$$

再根据(4.2),可知(4.8)成立. 反之，假设(4.8)成立，那么

$$2(m-t-1-1) = n + (r-2t-1) + 1$$

和

$$2(r-2t-1+1) \leqslant 2(r-t) \leqslant 2(m-t-1+1)$$

成立，而

$$(m_1,r_1) = (m-t-1, r-2t-1),$$

所以(4.11)成立.

现在来证明充分性：由$(m_1,r_1)$满足(4.2)，有

$$\mathscr{M}(m_1,r_1;n) \neq \phi.$$

设$r-r_1=2t+l$,其中$t\geqslant 0$,$l=0$或1. 再取$m-m_1=t+t'$，其中$t'\geqslant 0$. 由(4.10)有$2t'\geqslant l$. 如果$t'=0$，那么$l=0$. 当$t=0$时，(4.9)自然成立；当$t>0$时,对于$1\leqslant i\leqslant t$,总有

$$2(r-2i) \leqslant 2(m-i) \leqslant n + r - 2i.$$

根据引理4.4，有

$$\mathscr{L}(m,r;n) \supset \mathscr{L}(m-1,r-2;n) \supset \cdots \supset \mathscr{L}(m-t,r-2t;n) = \mathscr{L}(m_1,r_1;n).$$

于是(4.9)成立. 现在设$t'>0$. 当$t=0$时，有

$$\mathscr{L}(m,r;n)=\mathscr{L}(m_1+t',r_1+l;n). \tag{4.12}$$

当$t>0$时，按照上述的推导，(4.12)也成立. 如果$l=0$，那么

$$\mathscr{L}(m_1+t',r_1+l;n)=\mathscr{L}(m_1+t',r_1;n). \tag{4.13}$$

对于$1\leqslant i\leqslant t'$，从$2r_1\leqslant 2m_1$可得

$$2r_1\leqslant 2(m_1+i).$$

根据引理4.3，可得

$$\mathscr{L}(m_1+t',r_1;n)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,r_1;n)$$
$$\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1,r_1;n). \tag{4.14}$$

从(4.12),(4.13)和(4.14)可知(4.9)成立. 如果$l=1$，那么

$$\mathscr{L}(m_1+t',r_1+l;n)=\mathscr{L}(m_1+t',r_1+1;n). \tag{4.15}$$

对于$1\leqslant i\leqslant t'-1$，从$2r_1\leqslant 2m_1$可得$2(r_1+1)\leqslant 2(m_1+1)$和$2(r_1+1)\leqslant 2(m_1+1+i)$. 根据引理4.3，有

$$\mathscr{L}(m_1+t',r_1+1;n)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,r_1+1;n)\supset\cdots$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+1,r_1+1;n). \tag{4.16}$$

由题设及(4.8)和(4.11)的等价性知，对满足$1\leqslant t\leqslant\left[\frac{r-1}{2}\right]$的$t$，

$$(m_1,r_1)=(m-t-1,r-2t-1)$$

和

$$2(m_1+1)=n+r_1+1$$

不能同时成立. 再根据引理4.5，有

$$\mathscr{L}(m_1+1,r_1+1;n)=\mathscr{L}(m_1,r_1;n). \tag{4.17}$$

从(4.12),(4.15),(4.16)和(4.17)可知(4.9)成立.

下面证明必要性. 由$(m_1,r_1)$满足(4.2)，有$\mathscr{M}(m_1,r_1;n)\neq\phi$. 再根据

$$\mathscr{M}(m_1,r_1;n)\subset\mathscr{L}(m_1,r_1;n)$$

和

$$\mathscr{L}(m_1,r_1;n)\subset\mathscr{L}(m,r;n),$$

有

$$\mathscr{M}(m_1,r_1;n)\subset\mathscr{L}(m,r;n).$$

对于

$$Q \in \mathscr{M}(m_1, r_1; n) \subset \mathscr{L}(m, r; n),$$

$Q$ 就一定是 $\mathscr{M}(m,r;n)$ 中子空间的交. 于是存在

$$P \in \mathscr{L}(m, r; n),$$

使得 $Q \subset P$. 因为 $P$ 的维数和秩分别是 $m$ 和 $r$，而 $Q$ 的维数和秩分别是 $m_1$ 和 $r_1$，那么 $m \geqslant m_1$ 和 $r \geqslant r_1$. 如果 $m = m_1$，那么 $P = Q$ 和 $r = r_1$. 于是(4.10)成立. 现在假设 $m > m_1$. 令

$$m_1 = m - t, t \geqslant 0.$$

由 $P$ 的秩是 $r$，可知 $Q$ 的秩 $\geqslant r - 2t$. 于是

$$r_1 \geqslant r - 2t.$$

因而

$$2m - 2m_1 = 2t \geqslant r - r_1 \geqslant 0,$$

即(4.10)成立. □

**定理4.7** 设 $n \geqslant 1$，$(m, r)$ 满足(4.8)

$$2r \leqslant 2m = n + r,$$

并且 $(m_1, r_1) = (m - t - 1, r - 2t - 1)$，这里 $t$ 是满足 $0 \leqslant t \leqslant \left[\frac{r-1}{2}\right]$ 的一个整数，那么

$$\mathscr{L}(m, r; n) \not\supset \mathscr{L}(m_1, r_1; n). \tag{4.18}$$

**证明** 从(4.8)可得

$$\begin{aligned} 2(r - 2t - 1) &\leqslant 2r - 2t - 2 \\ &\leqslant 2(m - t - 1) \\ &\leqslant n + r - 2t - 1. \end{aligned}$$

于是 $\mathscr{M}(m_1, r_1; n) \neq \phi$. 设 $P \in \mathscr{M}(m_1, r_1; n)$，即 $P$ 是 $(m - t - 1, r - 2t - 1)$ 型子空间，其中 $1 \leqslant t \leqslant \left[\frac{r-1}{2}\right]$. 那么存在 $(m - r - t) \times n$ 矩阵 $X$ 和 $(n + r - 2m + 1) \times n$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}^t \overline{\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} I^{(r-2t-1)} & & & \\ & 0 & I^{(m-r-t)} & \\ & I^{(m-r-t)} & 0 & \\ & & & I^{(n+r-2m+1)} \end{bmatrix}.$$

由$2m=n+r$，可得$\dim Y=1$. 于是包含$P$的$m$维子空间必有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1Y \\ x_2+a_2Y \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}Y \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

其中$x_i\in X, a_i\in \mathbb{F}_{q^2}(i=1,2,\cdots,t+1)$. 写

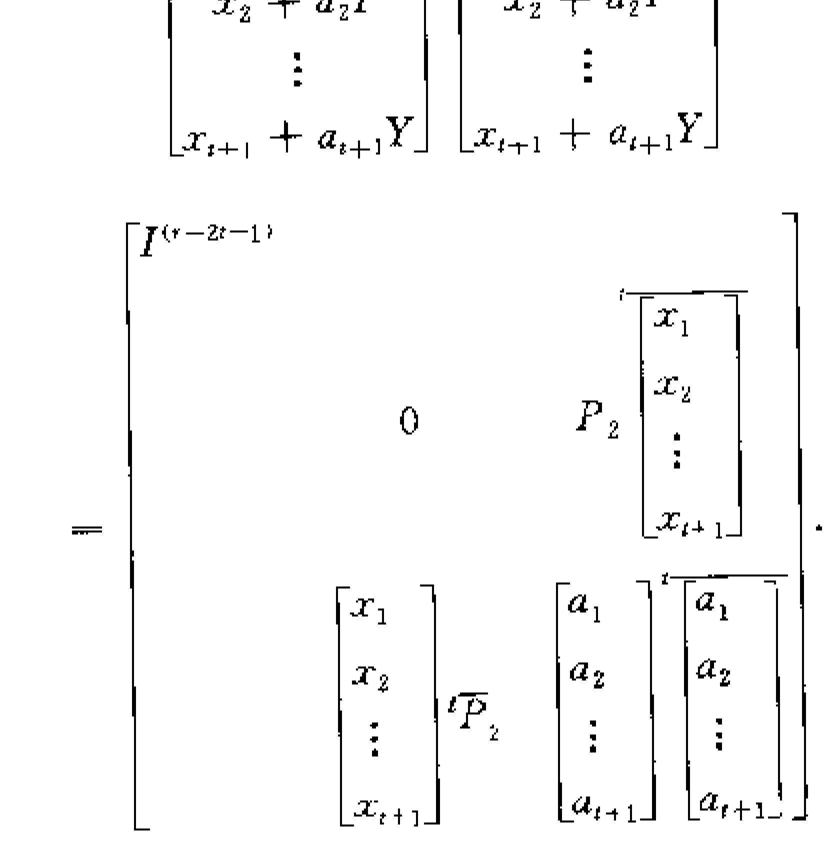
$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r-2t-1 \\ m-r+t \end{matrix},$$

那么

$$P_1{}^t\overline{X}=0, P_2{}^tX=I^{(m-r+t)}, P^t\overline{Y}=0.$$

于是

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1Y \\ x_2+a_2Y \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}Y \end{bmatrix} {}^t\overline{\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1Y \\ x_2+a_2Y \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}Y \end{bmatrix}}$$



$$=\begin{bmatrix} I^{(r-2t-1)} & & \\ & 0 & P_2{}^t\overline{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix}} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix}{}^t\overline{P_2} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{t+1} \end{bmatrix}{}^t\overline{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{t+1} \end{bmatrix}} \end{bmatrix}.$$

如果(4.19)是$(m,r)$型子空间，那么必有

$$\dim\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = t.$$

因此，我们可以假定$x_1,x_2,\cdots,x_t$线性无关，$x_{t+1}=0,a_1=0,\cdots,a_t=0$和$a_{t+1}\neq 0$. 这样(4.19)具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ Y \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_t$是$X$中线性无关的向量. 显然，形如(4.20)的子空间的交不是$P$，即$\mathscr{L}(m_1,r_1;n)$中含$P$，而$P\notin\mathscr{L}(m,r;n)$. 因此(4.18)成立. □

## §4.4 $\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$中的子空间在$\mathscr{L}(m,r;n)$中的条件

**定理4.8** 设$n\geqslant 1$，$2r\leqslant 2m\leqslant n+r$，并且$m\neq n$. 如果$2m<n+r$，那么$\mathscr{L}(m,r;n)$由$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$和所有的$(m_1,r_1)$型子空间组成，其中$(m_1,r_1)$满足(4.10)

$$2m-2m_1\geqslant r-r_1\geqslant 0.$$

如果$2m=n+r$，那么$\mathscr{L}(m,r;n)$由$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$和所有的$(m_1,r_1)$型子空间组成，其中$(m_1,r_1)$满足(4.10)，并且对于$0\leqslant t\leqslant\left[\frac{r-1}{2}\right]$的整数$t$，$(m_1,r_1)\neq(m-t-1,r-2t-1)$.

**证明** 我们已约定$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$是$\mathscr{M}(m,r;n)$中零个子空间的交，所以$\mathbb{F}_{q^2}^{(n)}\in\mathscr{L}(m,r;n)$. 设$Q$是$(m,r_1)$型子空间，$(m_1,r_1)$满足(4.10)，并且在$2m=n+r$时，对于$0\leqslant t\leqslant\left[\frac{r-1}{2}\right]$的整数$t$，$(m_1,r_1)\neq(n-t-1,r-2t-1)$. 那么

$$Q \in \mathscr{M}(m_1, r_1; n) \subset \mathscr{L}(m_1, r_1; n) \subset \mathscr{L}(m, r; n),$$

其中后一个包含关系可以从定理4.6得到. 反之，假设

$$Q \in \mathscr{L}(m, r; n), Q \neq \mathbb{F}_{q^2}^{(n)},$$

并且$Q$是$(m_1, r_1)$型子空间. 因为$Q$是$\mathscr{M}(m, r; n)$中子空间的交，所以存在

$$P \in \mathscr{M}(m, r; n),$$

使得$P \supset Q$. 从定理4.6必要性的证明，可知(4.10)成立. □

**推论4.9** 设$n \geqslant 1, 2r \leqslant 2m \leqslant n + r$和$m \neq n$. 那么

$$\{0\} \in \mathscr{L}(m, r; n).$$

并且$\{0\} = \bigcap_{X \in \mathscr{M}(m, r, n)} X$是格$\mathscr{L}(m, r; n)$的最大元.

**证明** 如果$2m < n + r$，或者$2m = n + r$时，不存在$t \geqslant 0$使得$m = t + 1$和$r = 2t + 1$成立. 我们可以在定理4.6中取$(m_1, r_1) = (0, 0)$，该推论就可从定理4.8直接得到. 下面只需证明：在$2m = n + r$时，不存在非负整数$t$，使得$m = t + 1$和$r = 2t + 1$.

假设$2m = n + r$，并且存在整数$t \geqslant 0$，使得

$$m = t + 1 \text{和} r = 2t + 1,$$

那么

$$r = 2(m - 1) + 1 = 2m - 1.$$

于是

$$n = 2m - r = 1.$$

由题设$m \neq n$可知$m = 0, r = 0$. 这与已知的$2m = n + r$矛盾.

□

从定理4.8的证明可得

**推论4.10** 设$n \geqslant 1$, $(m, r)$满足$2r \leqslant 2m < n + r$. 如果$P \in \mathscr{L}(m, r; n), P \neq \mathbb{F}_{q^2}^{(n)}$面$Q$是包含在$P$中的子空间. 那么$Q \in \mathscr{L}(m, r; n)$. □

自然地我们会提出：在集合$\mathscr{L}(m, r; n)$中，如果按包含（或反包含）关系来规定它的偏序$\geqslant$，何时是几何格的问题. 这些问题我们将另文讨论.

## §4.5 格$\mathscr{L}(m,r;n)$的特征多项式

**定理4.11** 设$n\geqslant 1$，$2r\leqslant 2m<n+r$，并且$m\neq n$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,r;n),t)$$
$$=\left\{\sum_{r_1=r+1}^{n}\sum_{m_1=r_1}^{\left[\frac{n-r_1}{2}\right]}+\sum_{r_1=0}^{r}\sum_{m_1=m-\left[\frac{r-r_1+1}{2}\right]}^{\left[\frac{n+r_1}{2}\right]}\right\}N(m_1,r_1;n)g_{m_1}(t),$$

其中$N(m_1,r_1;n)=|\mathscr{M}(m_1,r_1;n)|$是$(m_1,r_1)$型子空间的个数，而$g_{m_1}(t)=(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{m_1-1})$是Gauss多项式.

**证明** 类似于定理3.11的证明，这里略去其证明过程. □

注意：对于$N(m_1,r_1;n)$的准确表示式，见文献［28］.

作为定理4.11的特殊情形，有如下的结果.

**推论4.12** 设$n\geqslant 2$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(n-1,n-2;n),t)=\sum_{k=n-1}^{n}N(k,k;n)g_k(t)$$
$$=g_{n-1}(t)(t-a),$$

这里

$$a=q^{(n-1)}\left(1-\frac{q^n-(-1)^n}{q-(-1)}\right).$$ □

**推论4.13** 设$n\geqslant 1$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(n-1,n-1;n),t)=\sum_{k=0}^{[n/2]}N(n-k,n-2k;n)g_{n-k}(t)$$
$$=g_{n-[n/2]}(t)\gamma(t),$$

这里$\gamma(t)\in\mathbb{Z}[t]$是次数为$[n/2]$的首一多项式. □

## §4.6 注记

本章是根据参考文献［12］编写的. 引理4.3，引理4.4，引理4.5，定理4.6的充分性，定理4.8，定理4.11，推论4.9，推论4.12和推论4.13都取自该文. 推论4.13是Orlik - Solomon的结

果.

本章主要参考资料有：参考文献 [12]，[21] 和 [28].

# 第五章　奇特征的正交群作用下子空间轨道生成的格

## §5.1　奇特征的正交群 $O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下子空间轨道生成的格

在本章中，设$\mathbb{F}_q$是 $q$ 个元素的有限域，这里 $q$ 是奇素数的幂.我们选定$\mathbb{F}_q$中的一个非平方元素 $z$.

设 $n=2\nu+\delta$，其中 $\nu$ 是非负整数，而 $\delta=0$，1或2. $\mathbb{F}_q$上$(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$**对称矩阵** $S$ **称为定号的**，如果对$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中的任一个向量 $x$，由 $xS{}^tx=0$推出 $x=0$，否则**称为非定号的**. 由文献[32]中第四章引理1可知，$\mathbb{F}_q$上定号对称矩阵的级数≤2. 我们引进符号

$$\Delta=\begin{cases}\phi, & \text{如果}\ \delta=0,\\ (1)\ \text{或}(z), & \text{如果}\ \delta=1,\\ \begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}, & \text{如果}\ \delta=2,\end{cases}$$

并且令

$$S_{2\nu+\delta,\Delta}=\begin{bmatrix}0 & I^{(\nu)} & \\ I^{(\nu)} & 0 & \\ & & \Delta\end{bmatrix}.$$

那么矩阵 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$中的 $\nu$ 称为 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的**指数**，而 $\Delta$ 称为 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$的定号部分（当 $\delta=1$或2时，$\Delta$ 是定号矩阵）. 如果 $\delta=0$或2，可把 $S_{2\nu+\delta,\phi}$和 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$分别简单地写为 $S_{2\nu}$和 $S_{2\nu+2}$.

**定义5.1**　$\mathbb{F}_q$上满足

$$TS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tT=S_{2\nu+\delta,\Delta}$$

的全体$(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$矩阵 $T$ 对矩阵乘法作成一个群，称为$\mathbb{F}_q$

上关于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的 $2\nu+\delta$ 级**正交群**，记作 $O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$.

如果 $\delta=0$ 或2，可把 $O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$ 分别简单地写为 $O_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$ 或 $O_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$.

$2\nu+\delta$ 维行向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 与正交群 $O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$ 在它上的作用一起（见§2.3)称为 $\mathbb{F}_q$ **上的 $2\nu+\delta$ 维正交空间**.

设 $P$ 是 $2\nu+\delta$ 维正交空间的 $m$ 维子空间，仍用 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵作为子空间 $P$ 的矩阵表示. 熟知[28]，$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP$ 合同于如下之一的标准形：

$$M(m,2s,s)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & \\ I^{(s)} & 0 & \\ & & 0^{(m-2s)}\end{bmatrix},$$

$$M(m,2s+1,s,1)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & \\ I^{(s)} & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0^{(m-2s-1)}\end{bmatrix},$$

$$M(m,2s+1,s,z)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & \\ I^{(s)} & 0 & & \\ & & z & \\ & & & 0^{(m-2s-1)}\end{bmatrix},$$

和

$$M(m,2s+2,s)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(m-2s-2)}\end{bmatrix},$$

其中 $s$ 分别满足 $0\leqslant 2s\leqslant m$, $0\leqslant 2s+1\leqslant m$, $0\leqslant 2s+1\leqslant m$ 和 $0\leqslant 2s+2\leqslant m$，并且把它称为 $P$ 的**指数**，而把 $P$ 分别称为 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的 $(m,2s,s)$, $(m,2s+1,s,1)$, $(m,2s+1,s,z)$ 和 $(m,2s+2,s)$**型子空间**. 我们使用符号 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 泛指上述四种情形. 其

中$0\leqslant s\leqslant[(m-\gamma)/2]$，$\gamma=0,1$，或2．并且

$$\Gamma=\begin{cases}\phi, & \text{如果 } \gamma=0,\\ (1)\text{ 或}(z), & \text{如果 } \gamma=1,\\ \begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}, & \text{如果 } \gamma=2.\end{cases}$$

如果对称矩阵$S_{2\nu+\delta,\Delta}$和正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$可从上下文之间看出时，就可以把P简单地说成$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间．我们把$(m,0,0,\phi)$型子空间说成$m$维**全迷向子空间**．而$(2s+\gamma,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间说成$2s+\gamma$维**非迷向子空间**．正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中的**向量**$v$称为**迷向的或非迷向的**．如果$vS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tv=0$，或$vS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tv\neq0$．显然，非零向量$v$是迷向的，或非迷向的，当且仅当由$v$生成的一维子空间$\langle v\rangle$是全迷向的，或非迷向的．

文献[28]中的定理6.3在后面经常用到，我们把它写成如下的

**定理5.1**　在$2\nu+\delta$维正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中，关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$存在$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，当且仅当

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 } \gamma\neq\delta\text{，或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta,\\ \nu+s, & \text{如果 } \gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta.\end{cases} \tag{5.1}$$

□

我们用$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$表示$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$的全体$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间所成的集合，如果$\delta=0$或2，有时分别写为$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu)$或$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+2)$．由Witt定理(见[33])，$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中的子空间集在正交群$O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$作用下的轨道．再用$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$表示由轨道$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$生成的格．如果$\delta=0$或2，有时又简单分别写为$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu)$和$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+2)$．

**定义5.2**　格$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$称为在正交群

$O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$作用下子空间轨道$\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$生成的格.

在格$\mathcal{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$确定后，为了书写方便，有时记$\mathcal{M}_2=\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$，$\mathcal{L}_2=\mathcal{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$.

由推论2.9，可得

**定理5.2** 设$n=2\nu+\delta$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1)

$$2s+\gamma\leqslant m \leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 }\gamma\neq\delta\text{，或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta,\\ \nu+s, & \text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta.\end{cases}$$

那么$\mathcal{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$是一个有限原子格. $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$和$\bigcap_{X\in\mathcal{M}_2}X$分别是它的最小元和最大元. 而$\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$是它的原子集.

## §5.2 若干引理

**引理5.3** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1)

$$2s+\gamma\leqslant m \leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 }\gamma\neq\delta\text{ 或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta,\\ \nu+s, & \text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta.\end{cases}$$

那么

$$\mathcal{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathcal{L}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

**证明** 我们只需证明

$$\mathcal{M}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathcal{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

如果$m-1<2s+\gamma$，那么

$$\mathcal{M}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$

$$= \phi \subset \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta, \Delta).$$

现在设 $m-1 \geqslant 2s+\gamma$. 对于 $P \in \mathscr{L}(m-1, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta, \Delta)$，不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma, 2s+\gamma, s, \Gamma) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 = m-1-2s-\gamma \geqslant 0$. 令 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+\gamma+2$. 从(5.1)得到 $\sigma_2 \geqslant 2$. 于是存在 $\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

是 $(2\nu+\delta) \times (2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma, 2s+\gamma, s, \Gamma) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $\sigma_2 \times \sigma_2$ 非奇异矩阵. 我们断言：$Y$ 中存在一对线性无关的迷向向量 $y_1$ 和 $y_2$. 如果 $\sigma > 2$，那么 $\Sigma_2$ 不是定号矩阵，也即 $\Sigma_2$ 的指数必须 $\geqslant 1$. 于是存在 $\sigma_2 \times \sigma_2$ 非奇异矩阵 $M$，使得

$$M\Sigma_2{}^tM = \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_3)} & \\ I^{(\sigma_3)} & 0 & \\ & & \Sigma_3 \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_3 \geqslant 1$, $\Sigma_3$ 是 $\Sigma_2$ 的定号部分. 令 $y_1$ 和 $y_2$ 分别是 $MY$ 的第一和 $\sigma_3+1$ 行，那么上述的断言成立；如果 $\sigma_2 = 2$，那么从(5.1)得到 $\nu+s-m+\delta=0, \gamma=\delta$ 和 $\Gamma=\Delta$. 因为(5.3)合同于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$，所以 $\Sigma_2$ 的指数是1. 因而上述的断言也成立. 由此可得

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\quad\square$$

**引理5.4** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，$s\geqslant1$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1)．那么

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\gamma,s-1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}$$

**证明** 设$P$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$的$(m-1,2(s-1)+\gamma,s-1,\Gamma)$型子空间，不妨假定

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix}M(2(s-1)+\gamma,2(s-1)+\gamma,s,\Gamma)&\\&0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-\gamma+1\geqslant1$. 令$\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 从(5.1)得到$\sigma_2\geqslant0$．于是存在$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵$X$和$\sigma_2\times(2\nu+\delta)$矩阵$Y$，使得(5.2)

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}$$

是$(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}S_{2\nu+\delta,\Delta}\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}M(2(s-1)+\gamma,2(s-1)+\gamma,s,\Gamma)&&&\\&0&I^{(\sigma_1)}&\\&I^{(\sigma_1)}&0&\\&&&\Sigma_2\end{bmatrix},$$

其中$\Sigma_2$是$\sigma_2\times\sigma_2$非奇异对称矩阵.

先考虑$\sigma_1\geqslant2$的情形. 设$x_1$和$x_2$分别是$X$的第一和第二行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

现在来考虑$\sigma_1=1$的情形. 这时$m=2s+\gamma$. 由题设$m<2\nu+\delta$. 于是$\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+\gamma=(2\nu+\delta)-(2s+\gamma)>0$. 设$X=\langle x\rangle$，而$y$是$Y$的非零向量. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ x \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ x+y \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ x \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ x+y \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta). \quad \square$$

**引理5.5** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant\gamma-\gamma_1\geqslant0$，并且$(m,2s+r,s,\Gamma)$满足(5.1). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta) \supset \mathscr{L}(m-(\gamma-\gamma_1),2s+\gamma_1,s,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta).$$

除非

$$2s+\gamma \leqslant m = \begin{cases} \nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果}\gamma\neq\delta\text{或}\gamma=\delta\text{而}\Gamma=\Delta, \\ \nu+s, & \text{如果}\gamma=\delta=1\text{而}\Gamma\neq\Delta \end{cases} \tag{5.4}$$

成立时，表5.1中所列的情形之一出现.

**证明** 设$P$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$的$(m-(\gamma-\gamma_1),2s+\gamma_1,s,\Gamma_1)$型子空间. 不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma_1,2s+\gamma_1,s,\Gamma_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

其中 $\sigma_1=m-(2s+r)\geqslant 0$. 设 $Q$ 是 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间，我们可以假定

$$QS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tQ=\begin{bmatrix} M(2s+\gamma,2s+\gamma,s,\Gamma) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

把 $Q$ 的矩阵表示写成分块矩阵形式

表 5.1[①]

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\Delta$ | $\Gamma$ | $\Gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | $\phi$ | 1或 $z$ | $\phi$ | $\mathbb{F}_3$ |
| 1 | 1 | 0 | 1(或 $z$) | 1(或 $z$) | $\phi$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 1 | 2 | 1 | 1(或 $z$) | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | 1(或 $z$) | $\mathbb{F}_3$ |
| 2 | 2 | 1 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | 1或 $z$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 2 | 0 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & z\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | $\phi$ | $\mathbb{F}_q$ |

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{bmatrix}\begin{matrix}2s\\ \gamma,\\ \sigma_1\end{matrix}$$

那么 $Q_2S_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tQ_2=\Gamma$. 把 $Q_2$ 写成如下的矩阵表示

$$Q_2=\begin{bmatrix}Q_{21}\\Q_{22}\end{bmatrix}\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma-\gamma_1\end{matrix},$$

使得

$$\begin{bmatrix}Q_{21}\\Q_{22}\end{bmatrix}S_{2\nu+\delta,\Delta}{}^t\begin{bmatrix}Q_{21}\\Q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_1 & \\ & \Gamma_2\end{bmatrix},$$

---

① 为了书写方便，表5.1第二行中的 $\Delta,\Gamma$ 所取的值表示：$\Delta=\Gamma=1$，或 $\Delta=\Gamma=z$. 表5.1第三行表示法也如此. 并且，在以后的表中也有类似的表示法.

因而它合同于 $\Gamma$. 于是

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\triangle} {}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma_1, 2s+\gamma_1, s, \Gamma_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

由 Witt 定理(见[33]),存在 $T \in O_{2\nu+\delta,\triangle}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$P = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} T.$$

令 $(\gamma-\gamma_1)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Q_{22}T = Y$, 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\triangle} {}^t\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma_1, 2s+\gamma_1, s, \Gamma_1) & & \\ & 0^{(\sigma_1)} & \\ & & \Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

设 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 从(5.1)可得 $\sigma_2 \geqslant 0$. 那么存在一个 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和一个 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Z$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

是 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵, 并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\triangle} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & & & \\ & & \Gamma_1 & & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & \\ & & & & & \Gamma_2 & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 非奇异对称矩阵. 分以下两种情形:

(i) $2s+\gamma \leqslant m$

$$< \begin{cases} \nu + s + \min\{\gamma,\delta\}, \text{如果 } \gamma \neq \delta, \text{或 } \gamma = \delta \text{ 而 } \Gamma = \Delta, \\ \nu + s, \qquad\qquad\qquad \text{如果 } \gamma = \delta = 1 \text{ 而 } \Gamma \neq \Delta. \end{cases} \tag{5.6}$$

我们断言：$\Sigma_2$的指数$\geqslant 1$. 对于$\gamma \neq \delta$ 和 $\gamma=\delta=1$而$\Gamma \neq \Delta$ 的情形，$\sigma_2 \geqslant 3$. 因为 $\Sigma_2$的定号部分的级数不会超过2，所以断言成立；对于 $\gamma=\delta$ 而 $\Gamma=\Delta$ 的情形，$\sigma_2 \geqslant 2$. 因为(5.5)合同于 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$，而

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \\ & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

合同于 $\Gamma$，所以上述的断言也成立. 因此在 $Z$ 中存在两个线性无关的迷向向量 $z_1$和 $z_2$. 如果$\gamma - \gamma_1 = 1$，那么 $Y$ 是1维子空间. 令 $Y = \langle y \rangle$，因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y + z_1 \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ y - z_1 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta, \Delta).$$

然而，如果$\gamma - \gamma_1 = 2$，即$\gamma = 2$而$\gamma_1 = 0$，那么 $\Gamma_1$不出现，而 $\Gamma_2$是合同于 $\Gamma$ 的$2 \times 2$非奇异对称矩阵. 于是存在$Y$ 的一个基 $y_1$，$y_2$，使得

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -z \end{bmatrix}.$$

因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + z_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1+z_1\\y_2\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_1\\y_2+z_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+r,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

(ii) $2s+\gamma\leqslant m$

$$=\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果}\gamma\neq\delta,\text{或}\gamma=\delta\text{而}\Gamma=\Delta,\\ \nu+s, & \text{如果}\gamma=\delta=1\text{而}\Gamma\neq\Delta.\end{cases}$$

令

$$R=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}\text{和}\Sigma=\begin{bmatrix}\Gamma_2 & \\ & \Sigma_2\end{bmatrix}.$$

我们对 $\delta=0,1$，或2三种情形分别进行讨论.

(a) $\delta=0$. 再分“$\gamma=1$”，“$\gamma=2$，$\gamma_1=1$”和“$\gamma=2$，$\gamma_1=0$”三种情形.

如果 $\gamma=1$，那么 $\gamma_1=0$，$\sigma_2=1$，因而 $\dim R=2$. 因为(5.5)合同于 $S_{2\nu}$，所以 $\Sigma$ 的指数是1. 于是存在2×2非奇异矩阵 $B_2$，使得

$$B_2RS_{2\nu}{}^tR^tB_2=B_2\sum{}^tB_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_3$，那么存在 $\alpha\in\mathbb{F}_q^*$ 使得 $\alpha^2\neq1$；因而 $y_1=\left[1,\frac{1}{2}\Gamma\right]B_2R$ 和 $y_2=\left[\alpha,\frac{1}{2}\alpha^{-1}\Gamma\right]B_2R$ 是 $R$ 中两个线性无关的向量，使得 $y_1S_{2\nu}{}^ty_1=y_2S_{2\nu}{}^ty_2=\Gamma$. 于是

$$\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu).$$

因此，引理5.5在这种情形下成立. 然而，如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$，那么 $R$ 中

满足 $yS_{2\nu}{}^ty=\Gamma$ 的所有非零向量 $y$ 其分量成比例. 对于$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中任一个包含 $P$ 的 $m$ 维子空间均可假定有矩阵表示

$$\begin{bmatrix} P \\ x+y \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

其中 $x\in X$, $y\in R$ 和 $x+y\neq 0$. 如果(5.7)是$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，那么必有 $x=0$和 $yS_{2\nu}{}^ty=\Gamma$. 这就是说，仅存在一个包含 $P$ 的$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间. 因此，当(5.4)成立，而在 $\delta=0$, $\gamma=1$, $\gamma_1=0$和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$的情形，$P\notin\mathscr{L}(m,\ 2s+\gamma,\ s,\ \Gamma;\ 2\nu)$.

如果$\gamma=2$和$\gamma_1=1$,那么$\sigma_2=2$. 因为(5.5)合同于$S_{2\nu}$，所以

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & & \\ & \Gamma_2 & \\ & & \Sigma_2 \end{bmatrix} \text{合同于} \begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{bmatrix}.$$

因而 $\Sigma_2$是一个$2\times 2$定号对称矩阵. 我们可以选取 $Z$ 的一个基 $z_1$, $z_2$，使得

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} S_{2\nu} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \\ & \Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

因为$\gamma-\gamma_1=1$，所以$Y$ 是1维子空间. 令$Y=\langle y\rangle$，那么$yS_{2\nu}{}^ty=\Gamma_2$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间. 并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu).$$

如果$\gamma=2$和$\gamma_1=0$,那么$\gamma-\gamma_1=2$,$\sigma_2=2$. 因而$\dim R=4$,因为(5.5)合同于$S_{2\nu}$. 所以$\Sigma$ 的指数是2，因而 $\Sigma_2$是$2\times 2$定号对称矩阵，不妨设

$$ZS_{2\nu}{}^tZ = \Gamma_2 = \Gamma.$$

所以

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu).$$

(b) $\delta=1$. 再分"$\gamma=1,\Gamma\neq\Delta$","$\gamma=1,\Gamma=\Delta$","$\gamma=2,\gamma_1=1,\Gamma_1=\Delta$","$\gamma=2,\gamma_1=1,\Gamma_1\neq\Delta$"和"$\gamma=2,\gamma_1=0$"五种情形.

如果$\gamma=1$和$\Gamma\neq\Delta$,那么$\gamma_1=0,\gamma-\gamma_1=1,\sigma_2=2$,因而$\dim R=3$. 因为(5.5)合同于$S_{2\nu+1,\Delta}$，所以存在3×3非奇异矩阵$B_3$，使得

$$B_3RS_{2\nu+1,\Delta}{}^tR{}^tB_3=B_3\Sigma{}^tB_3=\begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & -\Gamma & \\ & & \Delta \end{bmatrix}.$$

因为$\mathbb{F}_q$上两个$n\times n$非奇异对称矩阵合同,当且仅当它们的行列式相差$\mathbb{F}_q$中的一个非零平方因子，而

$$\det\begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & -\Gamma & \\ & & \Delta \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & \Gamma & \\ & & -\Delta \end{bmatrix},$$

所以存在3×3非奇异矩阵$T_3$，使得

$$T_3\begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & -\Gamma & \\ & & \Delta \end{bmatrix}{}^tT_3=\begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & \Gamma & \\ & & -\Delta \end{bmatrix}.$$

于是向量$y_1=(1,0,0)T_3B_3R$和$y_2=(0,1,0)T_3B_3R$是两个线性无关的向量，并且满足$y_1S_{2\nu+1,\Delta}{}^ty_1=y_2S_{2\nu+1,\Delta}{}^ty_2=\Gamma$. 因此

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

如果$\gamma=1,\Gamma=\Delta$,那么$\gamma_1=0,\sigma_2=0,\dim R=1$,以及$\Gamma_2$合同于$\Gamma=\Delta$. 因而可假定$\Gamma_2=\Gamma=\Delta$. 由此可得$YS_{2\nu+1,\Delta}{}^tY=\Gamma$. 因为包含$P$的任一个$m$维子空间均有矩阵表示形式

$$\begin{bmatrix}P\\x+y\end{bmatrix},\tag{5.8}$$

其中$x\in X$, $y\in Y$和$x+y\neq0$, 所以, 当(5.8)是$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间时, 必有$x=0$和$yS_{2\nu+1,\Delta}{}^ty=\Gamma$. 因而$\begin{bmatrix}P\\Y\end{bmatrix}$是包含$P$的唯一的$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间. 因此, 当(5.4)成立时, 对于'$\delta=1$, $\gamma=1$, $\gamma_1=0$和$\Gamma=\Delta$'的情形, $P\notin\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta)$.

如果$\gamma=2,\gamma_1=1$和$\Gamma_1=\Delta$,那么$\gamma-\gamma_1=1,\sigma_2=1,\dim R=2$, 并且$\Sigma$的指数是1,重复情形(ii)(a)中所列情形$\gamma=1$的讨论,可得到类似的结论.

如果$\gamma=2,\gamma_1=1$和$\Gamma_1\neq\Delta$,那么$\gamma-\gamma_1=1,\sigma_2=1,\dim R=2$, 并且$\Sigma$是定号的. 因而可假定

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Gamma_2&\\&-z\Gamma_2\end{bmatrix}.$$

令$(x_1,x_2)$是$\mathbb{F}_q^{(2)}$中满足$(x_1,x_2)\Sigma\,{}^t(x_1,x_2)=\Gamma_2$的2维向量, 也即, $x_1^2-zx_2^2=1$. 由Dickson[8]定理, 可知这个二次方程有$q+1$个不同的解. 因此它有两个线性无关的解: $(a_1, a_2)$ 和 $(b_1, b_2)$. 令$y_1=(a_1, a_2)R$和$y_2=(b_1,b_2)R$. 那么$y_1$和$y_2$是$R$中两个线性无关的向量, 使得$y_1S_{2\nu+1,\Delta}{}^ty_1=y_2S_{2\nu+1,\Delta}{}^ty_2=\Gamma_2$. 因而可得

$$\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间, 并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta).$$

最后让我们考虑'$\gamma=2$和$\gamma_1=0$'的情形. 这时$P$是一个$(m-2,2s,s)$型子空间. 由本情形中前面所列情形"$\gamma=1,\Gamma\neq\Delta$"的讨论可知，当$\Delta=1$(或$z$)而$\Gamma^*=z$(或1)时，存在两个$(m-1,2s+1,s,\Gamma^*)$型子空间$P_1$和$P_2$，使得$P=P_1\cap P_2$. 对每个$P_i$，由本情形中上述情形'$\gamma=2,\gamma_1=1$和$\Gamma_1\neq\Delta$'的讨论可知，存在两个$(m,2s+2,s,\Gamma)$型子空间$P_{i1}$和$P_{i2}$，使得$P_i=P_{i1}\cap P_{i2}$. 因此

$$\begin{aligned}P&=P_1\cap P_2=P_{11}\cap P_{12}\cap P_{21}\cap P_{22}\\&\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta).\end{aligned}$$

(c) $\delta=2$. 再分"$\gamma=1$","$\gamma=2,\gamma_1=1$"和"$\gamma=2,\gamma_1=0$"三种情形.

如果$\gamma=1$,那么$\gamma_1=0,\gamma-\gamma_1=1,\sigma_2=1,\dim R=2$，并且$\Sigma$是定号的，我们可以假定

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Gamma&\\&-z\Gamma\end{bmatrix}.$$

重复情形(ii)(b)中所列情形"$\gamma=2$，$\gamma_1=1$和$\Gamma_1\neq\Delta$"的讨论，可得到结论：$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+2,\Delta)$.

如果$\gamma=2$和$\gamma=1$,那么$\gamma-\gamma_1=1,\sigma_2=0$，并且$\dim R=1$. 我们可假定$\Gamma_2=-z\Gamma_1$. 重复情形(ii)(b)中所列情形"$\gamma=1$，$\Gamma=\Delta$"的讨论，可得到结论：$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$中包含$P$的$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间仅有一个. 因此，当(5.4)成立时，对于'$\delta=2,\gamma=2$和$\gamma_1=1$'的情形，$P\notin\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+2)$.

如果$\gamma=2$和$\gamma_1=0$,那么$\gamma-\gamma_1=2,\sigma_2=0,R=Y$的维数是2，并且$\Sigma=\Gamma_2$是定号的，我们可假定$\Sigma=\Gamma=\Delta$. 对于包含$P$的任一个$m$维子空间都具有形式

$$\begin{bmatrix}P\\x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix},\tag{5.9}$$

其中 $x_1, x_2 \in X$，而 $y_1, y_2 \in Y$. 如果(5.9)是$(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$型子空间，那么必有 $x_1 = x_2 = 0$，因为 (5.9) 的维数是 $m$，所以 $y_1$和 $y_2$ 必线性无关，也即，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Y.$$

因而

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一地包含 $P$ 的$(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$型子空间. 因此，在(5.4)成立时，对于'$\delta=2$、$\gamma=2$和$\gamma_1=0$'的情形，$P \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+2)$. □

**引理5.6** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 2$，$s\geqslant 1$，$(m, 2s+1, s, \Gamma)$ 满足 (5.1)，并且 $\Gamma_1 \neq \Gamma$. 那么

$$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, \Gamma; 2\nu+\delta, \Delta)$$
$$\supset \mathscr{L}(m-2, 2(s-1)+1, s-1, \Gamma_1; 2\nu+\delta, \Delta),$$

除非(5.4)成立时，表5.2所列的情形出现.

表 5.2

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\Delta$ | $\Gamma$ | $\Gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1(或 $z$) | 1(或 $z$) | $z$(或1) | $\mathbb{F}_q$ |

**证明** 设 $P$ 是$(m-2, 2(s-1)+1, s-1, \Gamma_1)$型子空间，不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & \\ & & \Gamma_1 & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 = m-2s-1 \geqslant 0$. 令 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+1$. 由(5.1)有 $\sigma_2 \geqslant 0$. 于是存在 $\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$矩阵$X$ 和$(\sigma_2+2)\times(2\nu+\delta)$矩阵$R$，使

得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ R \end{bmatrix}$$

是 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ R \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\triangle} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & \\ & & \Gamma_1 & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & \Sigma \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

其中 $\Sigma$ 是 $(\sigma_2+2)\times(\sigma_2+2)$ 非奇异对称矩阵，由 $\sigma_2+2\geqslant 2$，可以假定 $\Sigma$ 具有形式

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & \\ & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $(\sigma_2+1)\times(\sigma_2+1)$ 非奇异对称矩阵. 另一方面，我们可设

$$QS_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tQ = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & \\ I^{(s)} & 0 & & \\ & & \Gamma & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

那么存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X_1$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y_1$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

是 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} Q \\ X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\triangle} {}^t\begin{bmatrix} Q \\ X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & & \\ & & \Gamma & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

其中 $\Sigma_2$是$\sigma_2\times\sigma_2$非奇异对称矩阵，因为(5.10)和(5.11)是合同的，所以 $\Sigma_1$合同于

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix}.$$

因而可假定

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & & \\ & \Gamma & \\ & & \Sigma_2 \end{bmatrix}.$$

并且，对应地写

$$R = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \sigma_2 \end{matrix} \text{和} \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}.$$

那么

$$YS_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tY = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & \\ & \Gamma \end{bmatrix} \text{和} \; ZS_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tZ = \Sigma_2.$$

我们分以下两种情形：

(i) 条件(5.6)成立.

这时，如同引理5.5的证明，可以证明 $\Sigma_2$的指数≥1，因而 $Z$ 中有两个线性无关的迷向向量 $z_1$和 $z_2$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + z_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix}$$

是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1+z_1\\y_2\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_1\\y_2-z_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).$$

(ii)条件(5.4)成立.

我们再分$\delta=0,1$,或2三种情形.

(a)$\delta=0$. 在这种情形，有$\sigma_2=1$，因而可假定$\Sigma_2=-\Gamma$. 于是

$$\Sigma=\begin{bmatrix}-\Gamma_1&&\\&\Gamma&\\&&-\Gamma\end{bmatrix}.$$

因为$\Gamma_1\neq\Gamma$，所以

$$\begin{bmatrix}-\Gamma_1&\\&\Gamma\end{bmatrix}$$

是定号的. 根据Dickson[8]定理，二次方程$-\Gamma_1x^2+\Gamma y^2=\Gamma_1$有$q+1$个解，因而它有两个线性无关的解$(a_1,a_2)$和$(b_1,b_2)$. 再记$R$的三行依次是$y_1,y_2$和$y_3$，那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_1\\y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}P\\a_1y_1+a_2y_2\\y_3\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\b_1y_1+b_2y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

都是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\\y_2\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\a_1y_1+a_2y_2\\y_3\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\b_1y_1+b_2y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu).$$

(b) $\delta=1$. 我们又分$\Gamma=\Delta$和$\Gamma\neq\Delta$两种情形.

如果$\Gamma=\Delta$，那么$\sigma_2=0,R=Y$的维数是2，并且

$$\Sigma=\begin{bmatrix}-\Gamma_1&\\&\Gamma\end{bmatrix}.$$

按照引理5.5情形(ii)(c)中所列情形“$\gamma=2$和$\gamma_1=0$”的证明过程，可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix}$$

是唯一地包含$P$的$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间. 因此，在(5.4)成立时，对于“$\delta=\gamma=\gamma_1=1,\Gamma=\Delta$和$\Gamma_1\neq\Gamma$”的情形，$P\notin\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta)$.

如果$\Gamma\neq\Delta$，那么$\sigma_2=2$和$\Gamma_1=\Delta$. 由(5.10)合同于$S_{2\nu+1,\Delta}$，可以假定$\Sigma_2$具有形式

$$\Sigma_2=\begin{bmatrix} -\Gamma & \\ & \Gamma_1 \end{bmatrix}.$$

注意到

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & & \\ & -\Gamma & \\ & & \Gamma_1 \end{bmatrix}\text{合同于}\begin{bmatrix} \Gamma_1 & & \\ & \Gamma & \\ & & -\Gamma_1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta).$$

(c) $\delta=2$. 这时$\sigma_2=1$. 由(5.10)合同于$S_{2\nu-1,\Delta}$，可以假定$\Sigma_2=-\Gamma_1$. 于是

$$\Sigma=\begin{bmatrix} -\Gamma_1 & & \\ & \Gamma & \\ & & -\Gamma_1 \end{bmatrix}.$$

按照(a)的过程进行，就可得$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+2)$.

□

**引理5.7** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，$s\geqslant 1$，$\gamma_1-\gamma=1$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1)．那么

$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\gamma_1,s-1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)$，除非(5.4)成立和表5.3所列的情形之一出现.

**表 5.3**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\Delta$ | $\Gamma$ | $\Gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\phi$ | $\phi$ | 1或$z$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 1 | 0 | 1 | 1(或$Z$) | $\phi$ | 1(或$z$) | $\mathbb{F}_3$ |
| 1 | 1 | 2 | 1(或$z$) | 1(或$z$) | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 1 | 2 | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | 1(或$z$) | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | $\mathbb{F}_3$ |

**证明** 设$P$是$(m-1,2(s-1)+\gamma_1,s-1,\Gamma_1)$型子空间，不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0&I^{(s-1)}&&\\I^{(s-1)}&0&&\\&&\Gamma_1&\\&&&0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-\gamma\geqslant 0$. 令$Q$是$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间，我们可以假定

$$QS_{2\nu-\delta,\Delta}{}^tQ=\begin{bmatrix}0&I^{(s-1)}&&&&\\I^{(s-1)}&0&&&&\\&&0&1&&\\&&1&0&&\\&&&&\Gamma&\\&&&&&0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix}.$$

把 $Q$ 写成分块矩阵形式

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{bmatrix}\begin{matrix}2(s\quad 1)\\2+\gamma\\\sigma_1\end{matrix},$$

那么

$$Q_2S_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tQ=\begin{bmatrix}0&1&\\1&0&\\&&\Gamma\end{bmatrix}.$$

从 $\gamma_1-\gamma=1$ 得到 $2+\gamma=\gamma_1+1$. 我们断言：存在1×1非零矩阵 $\Gamma_2$，使得

$$\begin{bmatrix}0&1&\\1&0&\\&&\Gamma\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}\Gamma_1&\\&\Gamma_2\end{bmatrix}$$

合同. 事实上，由两个非奇异对称矩阵合同当且仅当它们的行列式相差 $\mathbb{F}_q^*$ 中的一个平方因子可知，在 $\gamma_1=1$ 时，取 $\Gamma_2=-\Gamma_1$；在 $\gamma_1=2$ 时，由 $\Gamma_1=\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$，可取 $\Gamma_2=z\Gamma$. 这就证明了我们所述的断言. 令 $B$ 是 $(2+\gamma)\times(2+\gamma)$ 非奇异矩阵，使得

$$BQ_2S_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tQ_2{}^tB=\begin{bmatrix}\Gamma_1&\\&\Gamma_2\end{bmatrix}.$$

再写

$$BQ=\begin{bmatrix}Q_{21}\\Q_{22}\end{bmatrix}\begin{matrix}\gamma_1\\1\end{matrix},$$

那么

$$Q_{21}S_{2\nu+\delta,\triangle}{}^tQ_{21}=\Gamma_1.$$

因此

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & \\ & & \Gamma_1 & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

由 Witt 定理，存在 $T \in O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$，使得

$$P = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} T.$$

设 $Y = Q_{22}T$，那么 $Y$ 是$1\times(2\nu+\delta)$矩阵，$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$的秩是 $m$，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & \\ & & \Gamma_1 & & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} & \\ & & & & \Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

令 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 由(5.1)有 $\sigma_2 \geqslant 0$. 于是存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$矩阵 $Z$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

是$(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & & & \\ & & \Gamma_1 & & & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & \\ & & & & & \Gamma_2 & & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 非奇异对称矩阵.

令

$$R=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}\text{和 }\Sigma=\begin{bmatrix}\Gamma_2 & \\ & \Sigma_2\end{bmatrix}.$$

我们分以下两种情形.

(i) 条件(5.6)成立.

这时，如同引理5.5的证明，可证得 $\Sigma_2$ 的指数≥1. 由此可知，$Z$ 中存在一个非零迷向向量 $z$. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\Y\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\Y+z\end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\Y\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\Y+z\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta).$$

(ii) 条件(5.4)成立.

我们再分 $\delta=0,1$ 和2三种情形.

(a) $\delta=0$. 这时再进一步分 $\gamma=0$ 和1两种情形.

如果 $\gamma=0$，那么 $\gamma_1=1,\sigma_2=0,R=Y$ 的维数是1，并且 $RS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tR=\Gamma_2$. 我们可以证得

$$\begin{bmatrix}P\\Y\end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s,s)$ 型子空间. 因此，在(5.4)成立时，对于'$\delta=0,\gamma=0$ 和 $\gamma_1=1$'的情形，$P\notin\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$.

如果 $\gamma=1$，那么 $\gamma_1=2,\sigma_2=1,\dim R=2$，并且 $\Sigma$ 合同于 $\Gamma_1$. 根据 Dickson 定理[8]，在 $R$ 中存在两个线性无关的向量 $y_1$ 和 $y_2$，使得 $y_iS_{2\nu}{}^ty_i=\Gamma_2$，这里 $i=1,2$. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s+1,s,\Gamma)$ 型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\y_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\y_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu).$$

(b) $\delta=1$. 这时再进一步分“$\gamma=0,\gamma_1=1$而$\Gamma_1=\Delta$”,“$\gamma=0,\gamma_1=1$而$\Gamma_1\neq\Delta$”,“$\gamma=1,\gamma_1=2$而$\Gamma=\Delta$”和“$\gamma=1,\gamma_1=2$而$\Gamma\neq\Delta$”四种情形.

如果$\gamma=0,\gamma_1=1$,而$\Gamma_1=\Delta$, 那么$\sigma_2=1,\dim R=2$,并且$\Sigma$的指数是1，按照引理5.5证明中情形(ii)(a)所列情形$\gamma=1$的方法进行，得到结论：$P\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$，除非$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$.

如果$\gamma=0,\gamma_1=1$,而$\Gamma_1\neq\Delta$, 那么$\sigma_2=1,\dim R=2$，并且$\Sigma$是定号的. 按照引理5.5证明中情形(ii)(b)所列情形“$\gamma=2,\gamma_1=1,\Gamma_1\neq\Delta$”的方法进行，我们可得$P\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$.

如果$\gamma=1,\gamma_1=2$，而$\Gamma=\Delta$，那么$\sigma_2=0$，并且$R=Y$的维数是1. 按照引理5.5证明中情形(ii)(b)所列情形“$\gamma=1$而$\Gamma=\Delta$”的方法进行，可以得到：当(5.4)成立，又在情形“$\delta=1,\gamma=1,\gamma_1=2$而$\Gamma=\Delta$”出现时，$P\notin\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta)$.

如果$\gamma=1,\gamma_1=2$，而$\Gamma\neq\Delta$，那么$\sigma_2=2$，并且$\dim R=3$. 于是$R$中存在两个线性无关的向量$z_1$和$z_2$，使得$z_iS_{2\nu+1}{}^tz_i=\Gamma_2$，其中$i=1,2$. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\z_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\z_2\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix}P\\z_1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}P\\z_2\end{bmatrix}\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta).$$

(c) $\delta=2$. 这时再进一步分$\gamma=0$和1两种情形.

如果$\gamma=0$，那么$\gamma_1=1,\sigma_2=2,\dim R=3$. 由本引理情形(ii)(b)中所列情形“$\gamma=1,\gamma_1=2$和$\Gamma\neq\Delta$”的证明,可得$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+2,\Delta)$.

如果$\gamma=1$，那么$\gamma_1=2,\sigma_2=1,\dim R=2$，并且$\Sigma$的指数是1. 由上面情形(ii)(b)中‘$\gamma=0,\gamma_1=1$，而$\Gamma_1=\Delta$’的证明，可得$P\in$

$\mathscr{L}(m,2s-1,s,\Gamma;2\nu+2,\Delta)$，除$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$. □

**引理5.8** 设 $n=2\nu+\delta>m\geq 1,s\geq 2$，并且$(m,2s,s)$满足(5.1). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)\supset \mathscr{L}(m-2,2(s-2)+2,2\nu+\delta,\Delta),$$

除非(5.4)成立和表5.4所列的情形出现。

**表 5.4**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\Delta$ | $\Gamma$ | $\Gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | $\phi$ | $\phi$ | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | $\mathbb{F}_q$ |

**证明** 设$P$是$(m-2,2(s-2)+2,s-2)$型子空间，不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-2)} & & & \\ I^{(s-2)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s\geq 0$. 令$Q$是$(m,2s,s)$型子空间，不妨假定

$$QS_{2\nu+\delta}{}^tQ=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-2)} & & & & \\ I^{(s-2)} & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(2)} & \\ & & I^{(2)} & 0 & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix}.$$

把矩阵$Q$写成分块矩阵形式

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{bmatrix}\begin{matrix}2(s-2)\\ 4\\ \sigma_1\end{matrix},$$

那么

$$Q_2 S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{bmatrix}.$$

易知

$$\begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -z & & \\ & & 1 & \\ & & & -z \end{bmatrix}$$

是合同的．于是存在$4\times4$矩阵$B$，使得

$$BQ_2 S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t Q_2 {}^t B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -z & & \\ & & 1 & \\ & & & -z \end{bmatrix}.$$

令

$$BQ_2 = \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-2)} & & & \\ I^{(s-2)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix}.$$

由 Witt 定理，存在$T\in O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$，使得

$$P = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{21} \\ Q_3 \end{bmatrix} T.$$

设$2\times(2\nu+\delta)$矩阵$Q_{22}T=Y$，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -z & & & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -z \end{bmatrix}.$$

令 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 由(5.1)有 $\sigma_2\geqslant 0$. 于是存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Z$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

是 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-2)} & & & & & & & & \\ I^{(s-2)} & 0 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -z & & & & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & & \\ & & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & -z & & \\ & & & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 非奇异对称矩阵.

设

$$R=\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} 和 \Sigma=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -z & \\ & & \Sigma_2 \end{bmatrix}.$$

我们分以下两种情形：

(i) 条件(5.6)成立.

这时，按照引理5.5的证明进行，可证得$\Sigma_2$的指数$\geqslant 1$. 设$z_1$和$z_2$是$Z$中两个线性无关的迷向向量，并设

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1+z_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2+z_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s,s)$型子空间，并且

$$P=\begin{bmatrix} P \\ y_1+z_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2+z_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta).$$

(ii)条件(5.4)成立.

我们再分$\delta=0,1$和2三种情形.

(a)$\delta=0$. 在这种情形，$\sigma_2=0$和$R=Y$的维数是2. 如同引理5.5证明中对情形(ii)(c)中所列情形"$\gamma=2$, $\gamma_1=0$"的证明，可证得

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含$P$的$(m,2s,s)$型子空间. 因此，$P\notin\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$.

(b) $\delta=1$. 在这种情形，$\sigma_2=1$. 由(5.13)合同于$S_{2\nu+1,\Delta}$，可以假定$\Sigma_2=\Delta$. 按照引理5.6情形(ii)(a)的证明进行，可得$P\in\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+1,\Delta)$.

(c)$\delta=2$. 在这种情形. $\sigma_2=2$. 由(5.13)合同于$S_{2\nu+2}$,可以假定

$$\Sigma_2=\begin{bmatrix} 1 & \\ & -z \end{bmatrix}.$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s,s)$型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ Z \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+2).$$

## §5.3　各轨道生成格之间的包含关系

现在来研究格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$和格 $\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)$之间的包含关系.

**定理5.9**　设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$. 假定$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$和$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$满足(5.1)，也即

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 } \gamma\neq\delta, \text{或 } \gamma=\delta \text{ 而 } \Gamma=\Delta, \\ \nu+s, & \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma\neq\Delta\end{cases}$$

和

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1\leqslant\begin{cases}\nu+s_1+\min\{\gamma_1,\delta\}, & \text{如果 } \gamma_1\neq\delta, \text{或 } \gamma_1=\delta \text{ 而 } \Gamma_1=0, \\ \nu+s_1, & \text{如果 } \gamma_1=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma_1\neq\Delta\end{cases}$$

成立，而 $m\neq n$. 如果(5.4)

$$2s+\gamma\leqslant m =\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 } \gamma\neq\delta, \text{或 } \gamma=\delta \text{ 而 } \Gamma=\Delta, \\ \nu+s, & \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma\neq\Delta\end{cases}$$

成立时，表5.5所列的各种情形不出现. 那么

$$\mathscr{L}(m,\ 2s+\gamma,\ s,\ \Gamma;\ 2\nu+\delta,\ \Delta) \supset\mathscr{L}(m_1,\ 2s_1+\gamma_1,\ s_1,\ \Gamma_1;\ 2\nu+\delta,\ \Delta) \tag{5.14}$$

的充分必要条件是

$$2m-2m_1\geqslant \begin{cases}(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)+|\gamma-\gamma_1|\geqslant 2|\gamma-\gamma_1|, \\ \qquad\qquad \text{如果 } \gamma_1\neq\gamma, \text{或 } \gamma_1=\gamma, \text{而 } \Gamma_1=\Gamma, \\ (2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)+2\geqslant 4, \text{如果 } \gamma_1=\gamma=1 \text{ 而 } \Gamma_1\neq\Gamma.\end{cases}$$

(5.15)

其中 $D=\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$.

**证明** 先证明充分性. 由(5.15)可假定

$$(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)=2t+l, \tag{5.16}$$

和

$$m-m_1=t+t', \tag{5.17}$$

其中 $t$, $t'\geqslant 0$.

表 5.5

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\Delta$ | $\Gamma$ | $\Gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ | $m_1$ | $s_1$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | $\phi$ | 1或 $z$ | $\phi$ | $\mathbb{F}_3$ | $m-1-t$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 0 | 0 | 1 | $\phi$ | $\phi$ | 1或 $z$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-1-t$ | $s-1-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 0 | 0 | 2 | $\phi$ | $\phi$ | $D$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-2-t$ | $s-2-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-2$ |
| 1 | 1 | 0 | 1(或 $z$) | 1(或 $z$) | $\phi$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-1-t$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 2 | 1 | 1(或 $z$) | $D$ | 1(或 $z$) | $\mathbb{F}_3$ | $m-1-t$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 0 | 1 | 1(或 $z$) | $\phi$ | 1(或 $z$) | $\mathbb{F}_3$ | $m-1-t$ | $s-1-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 1 | 1 | 2 | 1(或 $z$) | 1(或 $z$) | $D$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-1-t$ | $s-1-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 1 | 1 | 1 | 1(或 $z$) | 1(或 $z$) | $z$(或1) | $\mathbb{F}_q$ | $m-2-t$ | $s-1-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 2 | 2 | 1 | $D$ | $D$ | 1或 $z$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-1-t$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 2 | 2 | 0 | $D$ | $D$ | $\phi$ | $\mathbb{F}_q$ | $m-2-t$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 2 | 1 | 2 | $D$ | 1或 $z$ | $D$ | $\mathbb{F}_3$ | $m-1-t$ | $s-1-t$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |

$$l=\begin{cases}0, 如果 \gamma=\gamma_1 而 \Gamma=\Gamma_1,\\ 1, 如果 |\gamma-\gamma_1|=1,\\ 2, 如果 |\gamma-\gamma_1|=2, 或者 \gamma-\gamma_1=1 而 \Gamma\neq\Gamma_1.\end{cases}$$

从(5.15),(5.16)和(5.17)得到$2t'\geqslant l$.

因为$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1),所以对于$1\leqslant i\leqslant t$,$(m-i,2(s-i)+\gamma,s-i,\Gamma)$也满足(5.1). 这样就可以连续地运用引理5.4,得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\gamma,s-1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma,s-t,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{5.18}$$

我们对$l=0,1$,或2的情形分别进行讨论.

(a) $l=0$. 这时$\gamma=\gamma_1$而$\Gamma=\Gamma_1$. 从(5.16)得到$s-s_1=t$. 因而

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma,s-t,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{5.19}$$

如果$t'=0$,那么(5.14)自然成立. 现在设$t'>0$. 由$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$满足(5.1),可知$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\neq\phi$. 因为$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1$,所以对于$0\leqslant i\leqslant t'-1$,$(m_1+t'-i,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$也满足(5.1). 这样就可以连续运用引理5.3得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{5.20}$$

从(5.18),(5.19)和(5.20),就得到(5.14).

(b) $l=1$. 因为$2t'\geqslant l$,所以$t'>0$. 从$l=1$可知$|\gamma-\gamma_1|=1$. 再分$\gamma-\gamma_1=1$和$\gamma_1-\gamma=1$两种情形.

(b.1) $\gamma-\gamma_1=1$. 从(5.16)得到$s-s_1=t$. 所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma,s-t,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\gamma,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{5.21}$$

因为$t'>0$,所以可以连续地运用引理5.3,得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+1,2s_1+\gamma,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{5.22}$$

由$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$满足(5.1)，可知$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\neq\phi$. 我们先断言：在$l=1,\gamma-\gamma_1=1$和(5.1)成立的前提下，

$$2s_1+\gamma\leqslant m_1+1=\begin{cases}\nu+s_1+\min(\gamma,\delta), & \text{如果 } \gamma\neq\delta, \text{或 } \gamma=\delta \text{ 而 } \Gamma=\Delta,\\ \nu+s_1, & \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma\neq\Delta\end{cases} \tag{5.23}$$

等价于(5.4)，$t'=1$和$m_1=m-t-1$.

事实上，如果(5.23)成立，那么

$$m-t'=m_1+t=\begin{cases}\nu+s_1+t+\min\{\gamma,\delta\}-1=\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}-1,\\ \qquad\qquad \text{如果 } \gamma\neq\delta, \text{或 } \gamma=\delta \text{ 而 } \Gamma=\Delta,\\ \nu+s_1+t-1, \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{而 } \Gamma\neq\Delta.\end{cases}$$

因(5.1)成立，可知$t'=1$和$2s+\gamma\leqslant m$. 因而$m_1=m-t-1$和(5.4)成立.

反之，假设(5.4)，$t'=1$和$m_1=m-t-1$成立，那么

$$2s_1+\gamma=2s+\gamma-2t\leqslant m-2t=m_1-t+1\leqslant m_1+1$$

和

$$m_1+1=m-t=\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}-t=\nu+s_1+\min\{\gamma,\delta\},\\ \qquad\qquad \text{如果 } \gamma\neq\delta, \text{或 } \gamma=\delta \text{ 而 } \Gamma=\Delta,\\ \nu+s-t=\nu+s_1, \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{而 } \Gamma\neq\Delta.\end{cases}$$

也即，(5.23)成立.

现在已知$m_1=m-t-1,l=1$和$\gamma-\gamma_1=1$，并且有题设(5.1)和(5.4)成立，而表5.5所列的各种情形不出现. 所以，在(5.23)成立时，表5.1所列$\gamma-\gamma_1=1$的各种情形也不会出现. 根据引理5.5，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+1,2s_1+\gamma,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\ &\quad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned} \tag{5.24}$$

从(5.18)，(5.21)，(5.22)，(5.24)和上述的结论，可知(5.14)成立，除非(5.4)成立时，表5.5中$\gamma-\gamma_1=1$的各情形出现.

(b.2) $\gamma_1-\gamma=1$. 从(5.16)得到$s-s_1=t+1$. 所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma,s-t,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\\ &\quad=\mathscr{L}(m_1+t,2(s_1+1)+\gamma,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned} \tag{5.25}$$

连续地运用引理5.3，有

$$\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1)+\gamma,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1)+\gamma,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\tag{5.26}$$

平行于(b.1)的情形. 在(5.1)，$l=1$和$\gamma_1-\gamma=1$的前提下，可以证明

$$2(s_1+1)+\gamma\leqslant m_1+1=\begin{cases}\nu+s_1+1+\min\{\gamma,\delta\},\\ \text{如果 }\gamma\neq\delta\text{，或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta,\\ \nu+s_1+1,\\ \text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta\end{cases}\tag{5.27}$$

等价于(5.4)，$t'=1$和$m_1=m-t-1$. 所以，由题设可知，在(5.27)成立时，表5.3所列$\gamma_1-\gamma=1$的各种情形不会出现. 根据引理5.7，我们有

$$\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1)+\gamma,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta).\tag{5.28}$$

组合(5.18)，(5.25)，(5.26)，(5.28)和上述的结论. 可知(5.14)成立，除非(5.4)成立时，表5.5中$\gamma_1-\gamma=1$的各情形出现.

(c) $l=2$. 这时$|\gamma-\gamma_1|=2$，或者$\gamma=\gamma_1=1$而$\Gamma_1\neq\Gamma$. 我们再分$\gamma-\gamma_1=2$，$\gamma_1-\gamma=2$，和$\gamma=\gamma_1=1$而$\Gamma_1\neq\Gamma$三种情形.

(c.1) $\gamma-\gamma_1=2$. 也即$\gamma=2$而$\gamma_1=0$. 由(5.16)有$s-s_1=t$. 因而也有(5.21). 由(5.15)和(5.17)可得$t'\geqslant2$. 仍可连续地运用引理5.3，得到

$$\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+2,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+2,2s_1+2,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta).\tag{5.29}$$

仍可平行于情形(b.1)的推导，在$l=2$和$\gamma-\gamma_1=2$的前提下，可以证明

$$2s_1+2\leqslant m_1+2=\nu+s_1+\delta\tag{5.30}$$

等价于(5.4)，$t'=2$和$m_1=m-t-2$. 所以，由题设可知，当(5.30)成立时，表5.1中$\gamma-\gamma_1=2$的情形不会出现. 根据引理5.5，我们有

$$\mathscr{L}(m_1+2,2s_1+2,s_1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1,s_1;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.31}$$

组合(5.18),(5.21),(5.29),(5.31)和上述的结论，可知(5.14)成立，除非(5.4)成立时，表5.5中$\gamma-\gamma_1=2$的各情形出现.

(c.2)$\gamma_1-\gamma=2$，也即$\gamma_1=2$和$\gamma=0$. 由(5.16)有$s-s_1=t+2$. 于是(5.18)变成

$$\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t),s-t;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.32}$$

并且有

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t),s-t;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$=\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+2),s_1+2;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.33}$$

由(5.15)和(5.17)有$t'\geqslant 2$. 连续地运用引理5.3，可得

$$\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+2),s_1+2;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+2,2(s_1+2),s_1+2;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.34}$$

仍可平行于情形(b.1) 的推导，在(5.1),$l=2$和$\gamma_1-\gamma=2$的前提下，可以证明

$$2(s_1+2)\leqslant m_1+2=\nu+s_1+2 \tag{5.35}$$

等价于(5.4),$t'=2$和$m_1=m-t-2$. 所以，由题设可知，当(5.35)成立时，表5.4所列的情形不会出现，根据引理5.8，可得

$$\mathscr{L}(m_1+2,2(s_1+2),s_1+2;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+2,s_1;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.36}$$

由(5.32),(5.33),(5.34),(5.36)和上述的结论，可知(5.14)成立，除非(5.4)成立时，表5.5中$\gamma_1-\gamma=2$的情形出现.

(c.3) $\gamma=\gamma_1-1$而$\Gamma\neq\Gamma_1$. 由(5.16)有$s-s_1=t+1$. 因而也有(5.25). 由(5.15)和(5.17)有$t'\geqslant 2$. 连续地运用引理5.3，有

$$\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1)+1,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+2,2(s_1+1)+1,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta). \tag{5.37}$$

再按照(b.1)的推导方法进行，在(5.1),$l=2$和$\gamma=\gamma_1=1$而$\Gamma\neq\Gamma_1$的前提下，可以证明

$$2(s_1+1)+1\leqslant m_1+2=\begin{cases}\nu+s_1+1+\min(1,\delta),\\ \text{如果}1\neq\delta,\text{或}1=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta,\\ \nu+s_1+1,\text{如果}1=\delta\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta\end{cases}$$

(5.38)

等价于(5.4)，$t'=2$和$m_1=m-t-2$. 所以，由题设可知，当(5.38)成立时，表5.2所列的情形不会出现. 由引理5.6，我们有

$$\mathscr{L}(m_1+2,2(s_1+1)+1,s_1+1,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta). \qquad (5.39)$$

从(5.18)，(5.25)，(5.37)，(5.39)和上述的结论，可知(5.14)成立. 除非(5.4)成立时，表5.5中$\gamma=\gamma_1=1$而$\Gamma\neq\Gamma_1$的情形出现.

综合上述各种情形，给出了充分性的证明.

下面证明必要性. 由$\phi\neq\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)$和$\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$，有$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. 对于任意$Q\in\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)$. 那么$Q$一定是$\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$中子空间的交. 于是存在$P\in\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$，使得$Q\subset P$. 如果$Q=P$，那么$m_1=m,s_1=s,\gamma_1=\gamma$和$\Gamma_1=\Gamma$. 因而(5.15)成立. 如果$Q\subsetneq P$，那么$m_1<m,s_1\leqslant s$和$2s_1+\gamma_1\leqslant 2s+\gamma$. 当$\gamma_1=\gamma$和$\Gamma_1=\Gamma$时，就有(5.15)的第一个不等式成立；当$\gamma_1=\gamma$但$\Gamma_1\neq\Gamma$时，又有$s_1<s$，因而(5.15)的第二个不等式成立；当$\gamma_1<\gamma$时，就有$(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)\geqslant\gamma-\gamma_1$，因而(5.15)的第一个不等式也成立；当$\gamma_1>\gamma$时，必有$s-s_1\geqslant\gamma_1-\gamma$，于是(5.15)的第一个不等式也成立. 这就证明了必要性. □

**定理5.10** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 1$. 假定$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.4)和$m\neq n$，而$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$满足(5.1)和(5.15). 如果表5.5中所列情形之一出现，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta). \qquad (5.40)$$

**证明** 我们只对表5.5的第1行，第8行，第11行和第3行分别

进行验证. 其余各行可类似地进行.

(a) 第1行. 这时 $\delta=0, \gamma=1, \gamma_1=0, m_1=m-1-t, s_1=s-t$, 而 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$. 并且 $(m, 2s+1, s, \Gamma)$ 所满足的(5.1)变成 $2s+1\leqslant m=\nu+s$. 因而 $(m_1, 2s_1, s_1)$ 满足 $2s_1\leqslant m_1\leqslant \nu+s_1$. 根据定理5.1, 有 $\mathscr{M}(m_1, 2s_1, s_1; 2\nu+\delta, \Delta)\neq\phi$. 设 $P\in\mathscr{M}(m_1, 2s_1, s_1; 2\nu+\delta, \Delta)$, 不妨假定

$$PS_{2\nu}{}^tP=\begin{bmatrix} M(2s_1,2s_1,s_1) & & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} & \\ & & 0^{(t)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m_1-2s_1=m-t-(2s+1)\geqslant t$. 令

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s_1+\sigma_1-t \\ t \end{matrix},$$

那么

$$P_1S_{2\nu}{}^tP_1=\begin{bmatrix} M(2s_1,2s_1,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} \end{bmatrix}.$$

设 $Q$ 是 $(m, 2s+1, s, \Gamma)$ 型子空间, 不妨假定

$$QS_{2\nu}{}^tQ=\begin{bmatrix} M(2s_1,2s_1,s_1) & & & \\ & M(2t,2t,t) & & \\ & & \Gamma & \\ & & & 0^{(\sigma_1-t)} \end{bmatrix}.$$

我们把 $Q$ 写成分块矩阵形式

$$Q=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s_1 \\ 2t \\ \gamma \\ \sigma_1-t \end{matrix},$$

那么 $Q_3S_{2\nu}{}^tQ_3=\Gamma$, 并且

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M(2s_1,2s_1,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} \end{bmatrix}.$$

由Witt定理, 存在 $T\in O_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$P_1=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_4\end{bmatrix}T.$$

令$1\times 2\nu$矩阵$Q_3T=Y$，那么

$$\begin{bmatrix}P_1\\Y\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}P_1\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M(2s_1,2s_1,s_1)&&\\&0^{(\sigma_1-t)}&\\&&\Gamma\end{bmatrix}.$$

设$\sigma_2=2(\nu+s-m)+1$. 从$2s+1\leqslant m=\nu+s$得$\sigma_2=1$. 于是存在$(\sigma_1-t)\times 2\nu$矩阵$X_1$，$t\times 2\nu$矩阵$X_2$和$1\times 2\nu$矩阵$Z$，使得

$$\begin{bmatrix}P_1\\X_1\\P_2\\X_2\\Y\\Z\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}P_1\\X_1\\P_2\\X_2\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M(2s_1,2s_1,s_1)&&&&&&&\\&0&I^{(\sigma_1-t)}&&&&&\\&I^{(\sigma_1-t)}&0&&&&&\\&&&0&I^{(t)}&&&\\&&&I^{(t)}&0&&&\\&&&&&\Gamma&\\&&&&&&\Sigma_2\end{bmatrix},\tag{5.41}$$

其中$\Sigma_2$是$\sigma_2\times\sigma_2$非奇异对称矩阵. 设

$$R=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}\text{和}\ \Sigma=\begin{bmatrix}\Gamma&\\&\Sigma_2\end{bmatrix},$$

那么$\dim R=2$. 因为(5.41)合同于$S_{2\nu}$，所以存在$2\times 2$非奇异矩阵$B$，使得

$$(BR)S_{2\nu}{}^t(BR)=B\Sigma{}^tB=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中包含$P$的$m$维子空间，具有形式

$$\begin{bmatrix}P\\x_1+v_1\\\vdots\\x_{t+1}+v_{t+1}\end{bmatrix},\tag{5.42}$$

其中 $x_i \in X_j\,(j=1,2)$，$v_i \in R$，并且 $x_1+v_1,\cdots,x_{t+1}+v_{t+1}$ 线性无关. 令

$$P=\begin{bmatrix}P_3\\P_4\end{bmatrix}\begin{matrix}2s_1\\\sigma_1\end{matrix},$$

那么 $P_3S_{2\nu}{}^tP_3=M(2s_1,\ 2s_1,\ s_1)$，$P_4S_{2\nu}{}^tP_4=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=0$，$P_3S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=0$，$P_4S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=I^{(\sigma_1)}$，$PS_{2\nu}{}^t(BR)=0$，并且

$$\begin{bmatrix}P\\x_1+v_1\\\vdots\\x_{t+1}+v_{t+1}\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}P\\x_1+v_1\\\vdots\\x_{t+1}+v_{t+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M(2s_1,2s_1,s_1) & & \\ & 0 & P_4S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{t+1}\end{bmatrix}\\ & \begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{t+1}\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^tP_4 & \begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_{t+1}\end{bmatrix}S_{2\nu}{}^t\begin{bmatrix}v_1\\\vdots\\v_{t+1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

如果形如(5.42)的 $Q$ 是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，那么

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_{t+1}\end{bmatrix}=t.$$

因而可假定 $x_1,\cdots,x_t$ 线性无关，$x_{t+1}=0$，$v_{t+1}\neq 0$. 如同引理5.5(ii)(a)的证明，在$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$时，$R$ 中所有满足 $yS_{2\nu}{}^ty=\Gamma$ 的向量 $y$ 只差 $\mathbb{F}_q^*$ 中一个因子. 令 $y_1$是其中的一个向量. 那么又可假定 $v_1,\cdots,v_t$ 均为零向量，$v_{t+1}=y_1$. 所以(5.42)具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

其中 $x_1, \cdots, x_t$ 是 $X$ 中线性无关的向量. 显然, 形如(5.43)的子空间的交不是 $P$. 因此(5.40)成立.

(b) 第8行. 这时 $\delta=\gamma=\gamma_1=1, \Gamma_1 \neq \Gamma$, 而 $\Gamma=\Delta, m_1=m-2-t, s_1=s-1-t$, 并且$(m, 2s+1, s, \Gamma)$所满足的(5.4)变成$2s+1 \leqslant m=\nu+s+1$. 因而$(m_1, 2s_1+1, s_1, \Gamma_1)$满足$2s_1+1 \leqslant m_1 \leqslant \nu+s_1$, 令 $P$ 是一个$(m_1, 2s_1+1, s_1, \Gamma_1)$ 型子空间, 不妨设

$$PS_{2\nu+1,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} M(2s_1+1, 2s_1+1, s_1, \Gamma_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m_1-(2s_1+1)=m-(2s+1)+t \geqslant t$. 设 $\sigma_2=2(\nu+s-m+1)+2$. 根据(5.4)有 $\sigma_2=2$. 于是存在 $\sigma_1 \times (2\nu+1)$矩阵 $X$ 和$2\times(2\nu+1)$矩阵 $R$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ R \end{bmatrix} S_{2\nu+1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s_1+1, 2s_1+1, s_1, \Gamma_1) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & \Sigma \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma$ 是$2\times 2$非奇异对称矩阵. 我们可假定 $\Sigma$ 具有形式

$$\begin{bmatrix} -\Gamma_1 & \\ & \Gamma \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中包含 $P$ 的 $m$ 维子空间具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1+v_1 \\ \vdots \\ x_{t+2}+v_{t+2} \end{bmatrix}, \tag{5.44}$$

其中 $x_i \in X, v_i \in R$, 并且 $x_1+v_1, \cdots, x_{t+2}+v_{t+2}$线性无关. 类似于

(a)的推导．如果(5.44)是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，那么(5.44)具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ v_{t+1} \\ v_{t+2} \end{bmatrix}, \tag{5.45}$$

其中$x_1,\cdots,x_t$是$X$中线性无关的向量，而$\begin{bmatrix} v_{t+1} \\ v_{t+2} \end{bmatrix}=R$. 因而形为(5.45)的子空间的交不是$P$. 所以(5.40)成立.

(c) 第11行. 这时$\delta=2,\gamma=1,\gamma_1=2,m_1=m-1-t,s_1=s-1-t$，而$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$. 并且$(m,2s+1,s,\Gamma)$所满足的(5.4)变成$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$而（$m_1$，$2s_1+2$，$s_1$）满足$2s_1+2\leqslant m\leqslant\nu+s_1+2$. 令$P$是$(m_1,2s_1+2,s_1)$型子空间. 不妨设

$$PS_{2\nu+2}{}^tP=\begin{bmatrix} M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} & \\ & & 0^{(t)} \end{bmatrix}.$$

令

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s_1+2+\sigma_1-t \\ t \end{matrix},$$

那么

$$P_1S_{2\nu+2}{}^tP_1=\begin{bmatrix} M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-(2s+1)+t\geqslant t$. 设$Q$是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，可以假定

$$
QS_{2\nu+2}{}^tQ=\begin{bmatrix}
M(2s_1,2s_1,s_1) & & & & & & & \\
 & 0 & I^{(t)} & & & & & \\
 & I^{(t)} & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & \Gamma & & \\
 & & & & & & 0^{(\sigma_1-t)}
\end{bmatrix}.
$$

我们把 $Q$ 写成分块矩阵形式

$$
Q=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s_1 \\ 2t \\ 2+\gamma \\ \sigma_1-t \end{matrix},
$$

采用引理5.7中的证明方法，可知

$$
Q_3S_{2\nu+2}{}^tQ_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \Gamma \end{bmatrix}.
$$

于是存在3×3矩阵 $B$，使得

$$
BQ_3S_{2\nu-2}{}^tQ_3{}^tB=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -z & \\ & & z\Gamma \end{bmatrix}.
$$

令

$$
BQ_3=\begin{bmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix},
$$

那么

$$
\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{31} \\ Q_4 \end{bmatrix} S_{2\nu+2} {}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{31} \\ Q_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} \end{bmatrix}.
$$

由Witt定理，存在$T\in O_{2\nu-2}(\mathbb{F}_q)$，使得

$$P_1=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_{31}\\Q_4\end{bmatrix}T.$$

令$Y=Q_{32}T$，那么

$$\begin{bmatrix}P_1\\Y\end{bmatrix}S_{2\nu+2}{}^t\begin{bmatrix}P_1\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & & \\ & 0^{(\sigma_1-t)} & \\ & & z\Gamma\end{bmatrix}.$$

设$\sigma_2=2(\nu+s-m)+3$. 由(5.4)有$\sigma_2=1$. 于是存在$\sigma_1\times(2\nu+2)$矩阵$X$和$1\times(2\nu+2)$矩阵$Z$，使得

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\\Z\end{bmatrix}S_{2\nu+2}{}^t\begin{bmatrix}P\\X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & & \\ & & & z\Gamma & \\ & & & & \Sigma_2\end{bmatrix},$$

其中$\Sigma_2$是$1\times1$非零矩阵. 令

$$R=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}\text{和 }\Sigma=\begin{bmatrix}z\Gamma & \\ & \Sigma_2\end{bmatrix}.$$

那么$\dim R=2$，$\Sigma$的指数是1. 下面类似(a)中相应部分的推导，可知(5.40)成立.

(d)第3行. 这时$\delta=\gamma=0$，$\gamma_1=2$，$m_1=m-2-t$，$s_1=s-2-t$，并且$(m,2s,s)$所满足的(5.4)变成$2s\leqslant m=\nu+s$，而$(m_1,2s_1+2,s_1)$满足$2s_1+2\leqslant m_1\leqslant\nu+s_1$. 令$P$是一个$(m_1,2s_1+2,s_1)$型子空间，不妨设

$$PS_{2\nu}{}^tP=\begin{bmatrix}M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix}.$$

令

$$P=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}\begin{matrix}2s_1+2+\sigma_1-t\\t\end{matrix},$$

那么

$$P_1S_{2\nu}{}^tP_1=\begin{bmatrix}M(2s_1+2,2s_1+2,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-t)}\end{bmatrix}.$$

其中$\sigma_1=m_1-(2s_1+2)=m-2s+t\geqslant t$. 仿照引理5.8的证明，设$Q$是$(m,2s,s)$型子空间. 不妨假定

$$QS_{2\nu}{}^tQ=\begin{bmatrix}M(2s_1,2s_1,s_1) & & & & & & \\ & 0 & I^{(t)} & & & & \\ & I^{(t)} & 0 & & & & \\ & & & 0 & I^{(2)} & & \\ & & & I^{(2)} & 0 & & \\ & & & & & & 0^{(\sigma_1-t)}\end{bmatrix}.$$

把$Q$写成分块矩阵形式

$$Q=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{bmatrix}\begin{matrix}2s_1\\2t\\4\\\sigma_1-t\end{matrix},$$

那么存在$4\times4$矩阵$B$，使得

$$BQ_3S_{2\nu}{}^tQ_3{}^tB=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -z & & \\ & & 1 & \\ & & & -z\end{bmatrix}.$$

再写

$$BQ_3=\begin{bmatrix}Q_{31}\\Q_{32}\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\2\end{matrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{31} \\ Q_4 \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{31} \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s_1+2, 2s_1+2, s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1-\nu)} \end{bmatrix}.$$

由Witt定理，存在 $T \in O_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$，使得

$$P_1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_{31} \\ Q_4 \end{bmatrix} T.$$

令 $Y = Q_{32}T$，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s_1+2, 2s_1+2, s_1) & & & \\ & 0^{(\sigma_1)} & & \\ & & 1 & \\ & & & -z \end{bmatrix}.$$

令 $\sigma_2 = 2(\nu + s - m)$，由(5.4)有 $\sigma_2 = 0$. 于是存在 $\sigma_1 \times 2\nu$ 矩阵 $X$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M(2s_1+2, 2s_1+2, s_1) & & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -z \end{bmatrix}.$$

类似于(a)中相应部分的推导，可知包含 $P$ 的 $(m, 2s, s)$ 型子空间具有形

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ Y \end{bmatrix}.$$

其中 $x_1,\cdots,x_t$ 是 $X$ 中线性无关的向量，因此(5.40)成立.

## §5.4 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间在 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 中的条件

**定理5.11** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant1$，$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(5.1)和 $m\neq n$. 如果(5.6)

$$2s+\gamma\leqslant m<\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \\ \qquad \text{如果 }\gamma\neq\delta\text{、或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta, \\ \nu+s,\text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta\end{cases}$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和满足(5.15)

$$2m-2m_1\geqslant\begin{cases}(2s+\gamma)-(2s_1-\gamma_1)+|\gamma-\gamma_1|\geqslant2|\gamma-\gamma_1|, \\ \qquad\qquad \text{如果 }\gamma_1\neq\gamma\text{ 或 }\gamma_1=\gamma\text{ 而 }\Gamma_1=\Gamma, \\ (2s+\gamma)-(2s_1-\gamma_1)+2\geqslant4,\text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma_1\neq\Gamma\end{cases}$$

的所有 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间组成. 如果(5.4)

$$2s+\gamma\leqslant m$$
$$=\begin{cases}\nu+s+\min\ \{\gamma,\ \delta\},\text{如果 }\gamma\neq\delta,\text{ 或 }\gamma=\delta\text{ 而 }\Gamma=\Delta, \\ \nu+s, \qquad \text{如果 }\gamma=\delta=1\text{ 而 }\Gamma\neq\Delta\end{cases}$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和满足(5.15)而不列在表5.5中的所有 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间组成.

**证明** 显然，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$. 假定 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(5.6). 令 $Q$ 是 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间，其中 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 满足(5.15). 由定理5.9，有 $Q\in\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. 反之，设 $Q$ 是 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间，并且 $Q\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. 那么存在 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间 $P$，使得 $Q\subset P$. 从定理5.9必要性的证明，可知(5.15)成立.

现在设 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(5.4)，并且 $Q$ 是 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间. 如果 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 不是列在表5.5中的任一情形，我们可用上述同样的方法，可以证明：$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 满

足(5.15)当且仅当$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. 然而，如果$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$是列在表5.5中的任一情形，那么由定理5.10的证明，可知$Q\notin\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. □

**推论5.12** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1). 那么

$$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_0}X$是$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$的最大元，除非表5.6所列的情形之一出现.

**表 5.6**

| $n$ | $\nu$ | $\delta$ | $m$ | $s$ | $\gamma$ | $\Gamma$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\mathbb{F}_3$ |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | $-1$ | $\mathbb{F}_3$ |

**证明** 我们可以把$\{0\}$考虑为$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$型子空间，其中$m_1=s_1=\gamma_1=0$和$\Gamma_1=\phi$. 由定理5.11，有$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$，除非(5.4)成立和列在表5.5中$\gamma_1=0$的情形之一出现. 下面对列在表5.5中$\gamma_1=0$的三行逐一进行核对.

先看表5.5的第1行，这时有$\delta=0,\gamma=1,m=t+1,s=t$和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_3$. 由(5.4)有$m=\nu+s$. 因而$\nu=1$和$n=2$. 由题设$n>m\geqslant1$，所以$m=1$. 于是$s=0,\gamma=1$和$\Gamma=\pm1$. 这时不会有$\{0\}\in\mathscr{L}(1,1,0,\Gamma;2\nu)$. 这正是表5.6所列的情形.

其次看表5.5的第4行，这时有$\delta=\gamma=1,m=t+1,s=t,\Delta=\Gamma$和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_q$. 由(5.4)有$m=\nu+s+1$. 因而$\nu=0$和$n=1$. 而这种情形已由题设排除.

最后再来看表5.5的第10行. 这时$\delta=\gamma=2,m=t+2,s=t$和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_q$. 由(5.4)有$m=\nu+s+2$. 因而$\nu=0$和$n=2$. 由题设$n>m\geqslant1$,所以$m=1$. 因而必有$s=0$和$\gamma=1$. 这与$\gamma=2$矛盾,所以这种情形也不会出现. □

**推论5.13** 设$n=2\nu+\delta\geqslant1$, $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(5.1)和$m$

$\neq n$. 设 $P$ 是属于 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 的真子空间，而 $Q$ 是包含在 $P$ 中的子空间. 那么 $Q\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$.

**证明** 由 $P\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 可知，存在 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间 $R$，使得 $P\subset R$. 因为 $Q\subset P$，所以 $Q\subset R$. 再根据定理5.11的证明，就有 $Q\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. □

我们对集合 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 按子空间的包含(或反包含)关系来规定它的偏序$\geqslant$，何时是几何格的问题，也将在另文中讨论. 并且在以后各章也如此.

## §5.5 格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 的特征多项式

现在设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，而 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(5.1). 根据有限格 $L$ 的特征多项式(见定义1.10)，可给出格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$ 的特征多项式. 令 $N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)=|\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)|$. 我们有

**定理5.14** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，并且 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(5.6)和 $m\neq n$

(a) 如果 $\gamma=0$，那么

$$
\begin{aligned}
&\chi(\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta),t)\\
&=\Big(\sum_{\gamma_1=0,2}+\sum_{\gamma_1=1}\sum_{\Gamma_1=1,z}\Big)\Big(\sum_{s_1=s-\gamma_1+1}^{\nu}\ \sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s-\gamma_1}\ \sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{l}\Big)\\
&\qquad N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)g_{m_1}(t),
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

其中

$$
l=\begin{cases}\nu+s_1+\min\{\gamma_1,\delta\}, & \text{如果 }\gamma_1\neq\delta\text{，或 }\gamma_1=\delta\text{ 而 }\Gamma_1=\Delta\\ \nu+s_1, & \text{如果 }\gamma_1=\delta=1\text{ 而 }\Gamma_1\neq\Delta.\end{cases}
\tag{5.47}
$$

而

$$g_{m_1}(t)=(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{m_1-1})$$

是 Gauss 多项式.

(b)如果$\gamma=1$,那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta),t)$$

$$=\sum_{\gamma_1=0,1,2}\Big(\sum_{s_1=s-[\gamma_1/2]-1}^{\nu}\ \sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s-[\gamma_1/2]}\ \sum_{m_1=m-s+s_1-[(2-\gamma_1)/2]+1}^{l}\Big)$$

$$N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)g_{m_1}(t).$$

$$+\Big(\sum_{s_1=s}^{\nu}\ \sum_{m_1=2s_1+1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s-1}\ \sum_{m_1=m-s+s_1}^{l}\Big).$$

$$N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\overline{\Gamma};2\nu+\delta)g_{m_1}(t), \qquad (5.48)$$

其中当$\gamma_1=1$时，有$\Gamma_1=\Gamma$，当$\Gamma=(1)$或$(z)$时，分别有$\overline{\Gamma}=(z)$或$(1)$，并且$l$由(5.47)确定．而$g_{m_1}(t)$是Gauss多项式.

(c)如果$\gamma=2$,那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+\delta,\Delta),t)$$

$$=\Big(\sum_{\gamma_1=0,2}+\sum_{\gamma_1=1}\sum_{\Gamma_1=1,z}\Big)\Big(\sum_{s_1=s+}^{\nu}\ \sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s}\ \sum_{m_1=m-s+s_1+\gamma_1-1}^{l}\Big)$$

$$N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)g_{m_1}(t). \qquad (5.49)$$

其中$l$也由(5.47)确定，而$g_{m_1}(t)$是Gauss多项式.

定理5.14的证明，可类似于定理3.11的证明，这里略去其证明过程. □

注意：$N(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta,\Delta)$的准确表示公式，已由戴宗铎和冯绪宁在文献[7]中得到，也可参见文献[28]和[32].

## §5.6 注记

本章是根据参考文献[13]编写的，其中的所有引理，定理5.9的充分性，定理5.11，定理5.14，推论5.12和推论5.13都取自该文.

本章的主要参考资料有：参考文献[13],[21],[28],[32]和[33].

# 第六章　偶特征的正交群作用下子空间轨道生成的格

## §6.1　偶特征的正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下子空间轨道生成的格

在这一章中，始终假定 $\mathbb{F}_q$ 是 $q$ 个元素的有限域，$q$ 是2的幂. 设 $N=\{x^2+x \mid x\in\mathbb{F}_q\}$. 易知，$N$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的一个指数为2的加法子群. 我们选定一个固定元素 $\alpha\in\mathbb{F}_q$，但 $\alpha\notin N$.

我们把 $\mathbb{F}_q$ 上全体 $n\times n$ 交错矩阵的集合记为 $\mathscr{K}_n$. $\mathbb{F}_q$ 上的两个 $n\times n$ 矩阵 $A$ 和 $B$ 说成是 mod$\mathscr{K}_n$ **同余**，如果 $A+B\in\mathscr{K}_n$，记成

$$A\equiv B(\mathrm{mod}\,\mathscr{K}_n),$$

或简单地记为 $A\equiv B$. $\mathbb{F}_q$ 上两个 $n\times n$ 矩阵 $A$ 和 $B$ 称为"**合同**"的，如果存在一个 $n\times n$ 非奇异矩阵 $Q$，使得 $QA\,{}^tQ\equiv B$. 显然，"合同"是 $n\times n$ 矩阵集合上的一个等价关系. $\mathbb{F}_q$ 上 $n\times n$ **矩阵** $A$ 称为**定号的**，如果从 $xA\,{}^tx=0$，$x\in\mathbb{F}_q$ 推出 $x=0$，否则称为**非定号的**. 由文献［32］中第五章引理5.3知，$\mathbb{F}_q$ 上定号矩阵的级数≤2：如果定号矩阵 $A$ 是1×1矩阵，$A$ 一定合同于（1）；如果 $A$ 是2×2矩阵，$A$ 一定合同于 $\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ & \alpha\end{bmatrix}$. 其中 $\alpha$ 是 $\mathbb{F}_q$ 中取定的一个不属于 $N$ 的元素. $\mathbb{F}_q$ 上"合同于"

$$\begin{bmatrix}A & I & \\ & B & \\ & & C\end{bmatrix}$$

的 $n\times n$ 矩阵 $G$，其中 $A$，$B$，$C$ 是对角形矩阵，$C$ 还是定号矩阵，

就称 $G$ 是**正则矩阵**(见[32]).

设 $n=2\nu+\delta$，其中 $\nu$ 是非负整数，而 $\delta=0, 1$，或2. 我们引进符号

$$\Delta=\begin{cases}\phi, & \\ 1, & \text{如果 } \delta=0, \\ \begin{bmatrix}\alpha & 1\\ & \alpha\end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta=1, \\ & \text{如果 } \delta=2,\end{cases}$$

并且令

$$G_{2\nu+\delta}=\begin{bmatrix}0 & I^{(\nu)} & \\ & 0 & \\ & & \Delta\end{bmatrix}.$$

那么称 $\nu$ 是 $G_{2\nu+\delta}$ 的**指数**，而 $\Delta$ 是它的**定号部分**.

**定义6.1** $\mathbb{F}_q$ 上满足

$$TG_{2\nu+\delta}{}^tT\equiv G_{2\nu+\delta}$$

的全体 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $T$ 对矩阵的乘法作成一个群，称为 $\mathbb{F}_q$ **上关于** $G_{2\nu+\delta}$ **的** $2\nu+\delta$ **级正交群**，记为 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$.

带有正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用的 $2\nu+\delta$ 维行向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 称为 $\mathbb{F}_q$ **上的** $2\nu+\delta$ **维正交空间**.

从文献 [28] 知道，$\mathbb{F}_q$ 上的 $m\times m$ 矩阵"合同"于如下之一的标准形：

$$M(m,2s,s)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(m-2s)}\end{bmatrix},$$

$$M(m,2s+1,s)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(m-2s-1)} & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

$$M(m,2s+2,s)=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \alpha & \\ & & & & 0^{(m-2s-2)}\end{bmatrix}.$$

我们使用符号 $M(m,2s+\gamma,s)$ 泛指这三种情形，其中 $s$ 是它的**指数**，$0\leqslant s\leqslant[(m-\gamma)/2]$，而 $\gamma=0$、1、或2.

设 $P$ 是 $2\nu+\delta$ 维正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的 $m$ 维子空间. 如果 $PG_{2\nu+\delta}{}^tP$ "合同"于 $M(m,2s+\gamma,s)$，那么 $P$ 称为 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 的 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ **型子空间**，其中

$$\Gamma=\begin{cases}0, \text{如果 } \delta=\gamma=1 \text{ 而 } e_{2\nu+1}\notin P,\\ 1, \text{如果 } \delta=\gamma=1 \text{ 而 } e_{2\nu+1}\in P,\\ \phi, \text{如果 } \delta\neq 1 \text{ 而 } \gamma\neq 1,\end{cases}$$

（当 $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 时，$e_{2\nu+1}$ 分别是 $\underset{2\nu\quad 1}{(0\quad 1)}$ 和 $\underset{2\nu\quad 1\quad 1}{(0\quad 1\quad 0)}$. 如果矩阵 $G_{2\nu+\delta}$ 和正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 可从上下文看出时，就简单说 $P$ 是 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间. 如果 $\delta\neq1$ 或 $\gamma\neq1$，那么 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间简称为 $(m,2s+\gamma,s)$ 型子空间. 我们把 $(m,0,0)$ 型和 $(2s+\gamma,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间分别称为**全奇异**和**非奇异子空间**. $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的**向量** $v$ 称为**奇异的**或**非奇异的**，如果分别有 $vG_{2\nu+\delta}{}^tv=0$ 或 $vG_{2\nu+\delta}{}^tv\neq0$.

文献［28］的定理7.5在本章及第八章中经常用到，现在把它写成如下的

**定理6.1** $2\nu+\delta$ 维正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 存在 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间，当且仅当

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\delta,\gamma\}, & \text{如果 } \delta\neq1, \text{或 } \gamma\neq1, \text{或}\\ & \gamma=\delta=1, \text{而 } \Gamma=1\\ \nu+s, & \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma=0.\end{cases}\tag{6.1}$$

□

我们用 $\mathscr{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 表示 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$

的全体 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间所成的集合. 如果 $\delta\neq$ 或 $\gamma\neq 1$, 有时也简单记为 $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s;2\nu+\delta)$. 由推广的 Witt 定理 (见 [10] 的定理2), $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的子空间集在正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的轨道. 再用 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 表示由轨道 $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 生成的格, 而由 $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s;2\nu+\delta)$ 生成的格又记为 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s;2\nu+\delta)$.

**定义6.2** 格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 称为正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下**子空间轨道** $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ **生成的格**. □

在格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 确定后, 有时为了书写简单, 记 $\mathcal{M}_3^{(\Gamma)}=\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$, $\mathscr{L}_3^{(\Gamma)}=\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$.

由推论2.9, 可得

**定理6.2** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$, 并且 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足 (6.1)

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 } \delta\neq 1,\text{或 } \gamma\neq 1,\text{或 } \gamma=\delta=1,\text{而 } \Gamma=1\\ \nu+s, & \text{如果 } \gamma=\delta=1 \text{ 而 } \Gamma=0.\end{cases}$$

那么 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 是一个有限原子格, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和 $\bigcap_{X\in\mathcal{M}_3^{(\Gamma)}}X$ 分别是它的最小元和最大元, 而 $\mathcal{M}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 是它的原子集. □

文献 [10] 中的引理8, 在今后要经常使用, 把它改写如下:

**引理6.3** 设 $P$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 的 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间, 并假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP\equiv M(m,2s+\gamma,s).$$

令 $\sigma_1=m-2s-\gamma$ 和 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 由(6.1)有 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$, 于是有 $P$ 的适当的矩阵表示, 仍记作 $P$, $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

是非奇异的．并且有只有如下三种情形之一出现．

(i) 对于 $\gamma=0$或2，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu-\delta} \begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma,2s+\gamma,s) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$是 $\sigma_2\times\sigma_2$正则矩阵，它的定号部分的级数是$|\delta-\gamma|$.

(ii)对于 $\gamma=1$而 $\delta=0$或2，以及 $\gamma=\delta=1$而 $\Gamma=0$，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} \begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}^t =$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & \alpha & & 1 \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \alpha \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta=2 \text{ 而 } \nu+s-m+1=0, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta\neq 2 \text{ 或 } \nu+s-m+1>0, \end{cases}$$

其中 $\Sigma_2$ 是$(\sigma_2-1)\times(\sigma_2-1)$ 正则矩阵，它的定号部分的级数是 $\delta$.

(iii) 对于 $\gamma=\delta=1$ 而 $\Gamma=1$,

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & \Sigma_3 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_3$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 正则矩阵,它没有定号部分. □

## §6.2 若干引理

**引理6.4** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$, 并且 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(6.1),那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta).$$

**证明** 我们只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta).$$

如果 $m-1<2s+\gamma$,那么

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$$
$$=\phi\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta).$$

现在设 $m-1\geqslant 2s+\gamma$. 对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$,可选择 $P$ 的一个矩阵表示 $P$,使得

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP\equiv M(m-1,2s+\gamma,s).$$

设 $\sigma_1=m-1-2s-\gamma$ 和 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+\gamma+2$, 那么 $\sigma_1\geqslant 0$,并且从(6.1)可得 $\sigma_2\geqslant 0$. 由引理6.3, 存在 $P$ 的一个矩阵表示, 仍记作 $P$, $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$, 使得(6.2)是非奇异的, 并且只有如下三种情形之一出现.

(i) 对于 $\gamma=0$ 或2,

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^{t}\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s+\gamma, 2s+\gamma, s) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\sigma_2 \times \sigma_2$ 正则矩阵，它的定号部分的级数是 $|\delta-\gamma|$；

(ii) 对于 $\gamma=1$ 和 $\delta=0$ 或 2，以及 $\gamma=\delta=1$ 而 $\Gamma=0$，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^{t}\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $(\sigma_1-1)\times(\sigma_2-1)$ 正则矩阵，它的定号部分的级数是 $\delta$（注意：如果 $\delta=2$ 和 $\gamma=1$，从(6.1)得到 $\nu+s-m+1\geqslant 0$. 因此 $\delta=2$ 和 $\nu+s-(m-1)+1=0$ 的情形不会出现）；

(iii) 对于 $\gamma=\delta=1$ 而 $\Gamma=1$，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^{t}\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \Sigma_3 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_3$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 定号矩阵，它没有定号部分.

在情形 (i) 和 (iii)，我们断言：在 $Y$ 中有一对线性无关的奇异向量 $y_1$ 和 $y_2$. 对于情形 (iii)，因为 $\sigma_2\geqslant 2$ 和 $\Sigma_3$ 无定号部分，这个断言自然成立；对于情形 (i)，如果 $\sigma_2>2$，我们的断言也成立；如果 $\sigma_2=2$，那么 $\gamma=\delta$ 和 $\Sigma_1$ 无定号部分，因此上述的断言也成立.

于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 型子空间，并且

$$P = \begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta).$$

下面留待考虑情形 (ii). 写

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ Z \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \sigma_2 - 1 \end{matrix}.$$

如果 $\Sigma_2$ 的指数≥1，那么按照 (i) 和 (iii) 的情形，可以得到 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$. 如果 $\Sigma_2$ 的指数是 0，那么 $\sigma_2 - 1 = \delta \geqslant 1$，并且 $\nu + s - m + 1 = 0$. 当 $\delta = 1$ 时，从 $\gamma=\delta=1$，$\Gamma=0$和 (6.1)推出 $\nu+s-m\geqslant 0$，这与 $\nu+s-m+1=0$矛盾. 因此必有 $\sigma_2 - 1=\delta=2$. 在进行“合同”变换后，可假定

$$ZG_{2\nu+\delta}{}^tZ \equiv \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{bmatrix}.$$

设 $z_1$ 和 $z_2$ 分别是 $z$ 的第一和第二行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

但 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix}$“合同”于 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ z_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$. □

**引理6.5** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，$s\geqslant 1$，并且 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 满足 (6.1)，那么

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)\\&\quad\supset \mathscr{L}(m-1, 2(s-1)+\gamma, s-1, \Gamma; 2\nu+\delta).\end{aligned}$$

**证明** 设 $P$ 是 $(m-1, 2(s-1)+\gamma, s-1, \Gamma)$ 型子空间，可选择子空间 $P$ 的一个矩阵表示 $P$，使得

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP \equiv M(m-1, 2(s-1)+\gamma, s-1).$$

设 $\sigma_1 = m-2s-\gamma+1$ 和 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+\gamma$. 从(6.1)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$. 由引理6.3，存在 $P$ 的一个矩阵表示，仍记作 $P$，$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(6.2)是非奇异的，并且有只有如下三种情形之一出现：

(i) 对于 $\gamma=0$ 或2，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} M(2(s-1)+\gamma, 2(s-1)+\gamma, s-1) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 正则矩阵，它定号部分的级数是 $|\delta-\gamma|$；

(ii) 对于 $\gamma=1$ 而 $\delta=0$ 或2，以及 $\gamma=\delta=1$ 而 $\Gamma=0$，

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{cases}
\begin{bmatrix}
0 & I^{(s-1)} & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\
 & & & \alpha & & 1 & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & \alpha &
\end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2 \text{ 而 } \nu + s - m + 1 = 0, \\
\begin{bmatrix}
0 & I^{(s)} & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & & \Sigma_2
\end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta \neq 2, \text{或 } \nu + s - m + 1 > 0,
\end{cases}
$$

其中 $\Sigma_2$ 是$(\sigma_2 - 1) \times (\sigma_2 - 1)$ 正则矩阵，它定号部分的级数是 $\delta$；

(iii) 对于 $\gamma=\delta=1$ 而 $\Gamma=1$，

$$
\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & I^{(s-1)} & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & \Sigma_3
\end{bmatrix},
$$

其中 $\Sigma_3$ 是 $\sigma_2 \times \sigma_2$ 正则矩阵，它无定号部分.

我们分以下两种情形：

1) $\sigma_1 \geqslant 2$. 设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别是 $X$ 的第一和第二行，那么

$$
\begin{bmatrix} P \\ x_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

是一对 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$.

2) $\sigma_1 = 1$. 这时 $m = 2s + \gamma$ 和 $\sigma_2 = 2(\nu + s - m) + \delta + \gamma = 2\nu + \delta - m > 0$. 令 $X = \langle x_i \rangle$ 和 $y$ 是 $Y$ 的第一行. 对于(i) 和(iii), 显然

$$\begin{bmatrix} P \\ x \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s + \gamma, s, \Gamma)$ 型子空间, 并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{S}(m, 2s + \gamma, s, \Gamma; 2\nu + \delta)$. 对于情形(ii), 如果 $\delta = 2$ 和 $\nu + s - m + 1 = 0$, 就有

$$\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix};$$

如果 $\delta \neq 2$ 或 $\nu + s - m > 0$, 我们有

$$\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

但两个矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

都“合同”于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

因此, 在上述两种情形下,

$$\begin{bmatrix} P \\ x+y \end{bmatrix}$$

也是$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间. 因此也有相同的结论. □

**引理6.6** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+1,s,\Gamma)$满足(6.1). 如果$\delta=1$,再假定$\Gamma=0$. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s,s;2\nu+\delta),$$

除非$\Gamma=0$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$和

$$2s+1\leqslant m=\nu+s$$

的情形出现.

**证明** 设$P$是$(m-1,2s,s)$型子空间. 我们可假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP\equiv M(m-1,2s,s).$$

设$\sigma_1=m-2s-1$和$\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+2$. 从(6.1)得到$\sigma_1\geqslant 0$和$\sigma_2\geqslant 0$. 由引理6.3,存在$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵$X$和$\sigma_2\times(2\nu+\delta)$矩阵$Y$,使得(6.2)是非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M(2s,2s,s) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中$\Sigma_1$是$\sigma_2\times\sigma_2$正则矩阵,它的定号部分的级数是$\delta$. 我们分以下两种情形:

$$\text{(i)}\ 2s+1\leqslant m<\begin{cases}\nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果}\ \delta\neq 1,\\ \nu+s, & \text{如果}\ \delta=1;\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ 2s+1\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果}\ \delta\neq 1,\\ \nu+s, & \text{如果}\ \delta=1.\end{cases}$$

在情形(i)，有

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 4, \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 2, \\ 5, \text{如果 } \delta = 1 \end{cases}$$

和

$$\Sigma_1 \text{ 的指数} \geqslant \begin{cases} 2, \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ 1, \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

于是存在 $\sigma_2 \times \sigma_2$ 非奇异矩阵

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \sigma_2 - 2 \end{matrix},$$

使得

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \Sigma_1 {}^t\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & \Sigma_4 \end{bmatrix}, \text{如 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \Sigma_5 \end{bmatrix}, \text{如果 } \delta = 2, \end{cases}$$

其中 $\Sigma_4$ 和 $\Sigma_5$ 的指数 $\geqslant 1$. 令 $y_1$ 和 $y_2$ 分别是 $Q_1Y$ 的第 1 和第 2 行，并且令 $y_3$ 是 $Q_2Y$ 的一个奇异向量，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+1, s, \Gamma)$ 型子空间，其中 $\Gamma = \phi$ 或 0，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$.

现在来考虑情形 (ii). 再分 $\delta=0$, $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 三种情形.

(ii-a) $\delta=0$. 这时 $\sigma_2=2$ 和 $\Sigma_1$ 的指数是1，通过“合同”变换，可以假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $y_1$ 和 $y_2$ 分别是 $Y$ 的第1行和第2行. 如果 $\mathbb{F}_q \neq \mathbb{F}_2$，那么存在 $a \in \mathbb{F}_q$，使得 $a \neq 0$ 和 $a \neq 1$. 于是 $z_1 = ay_1 + a^{-1}y_2$ 和 $z_2 = a^{-1}y_1 + ay_2$ 是 $Y$

的两个线性无关的向量，使得 $z_1 G_{2\nu+\delta}{}^t z_1 = z_2 G_{2\nu+\delta}{}^t z_2 = 1$. 因此

$$\begin{bmatrix} P \\ z_1 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s; 2\nu)$.

然而，如果 $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_2$，那么 $z = y_1 - y_2$ 是 $Y$ 中满足 $zG_{2\nu+1}{}^t z = 1$ 的唯一非零向量. $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中任一个包含 $P$ 的 $m$ 维子空间具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

其中 $x \in X$ 和 $y \in Y$. 我们有

$$\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} M(m-1, 2s, s) & P(G_{2\nu+\delta} + {}^t G_{2\nu+\delta}){}^t x \\ & yG_{2\nu+\delta}{}^t y \end{bmatrix}.$$

如果(6.3)是 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间，那么必有 $x = 0$ 和 $yG_{2\nu+\delta}{}^t y = 1$. 因此

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}$$

是包含 $P$ 的唯一的 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间，于是 $P \notin \mathscr{L}(m, 2s+1, s; 2\nu)$.

(ii.b) $\delta = 1$. 这时 $\sigma_2 = 3$. 通过“合同”变换，可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

设 $y_1$、$y_2$ 和 $y_3$ 依次是 $Y$ 的第1，第2和第3行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_3 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

中至少有两个是 $(m, 2s+1, s, 0)$ 型子空间，而这两个的交是 $P$，因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$.

(ii-c) $\delta=2$. 这时，$\sigma_2=2$ 和 $\Sigma_1$ 的指数是0. 令 $y_1$ 和 $y_2$ 是 $Y$ 中的两个线性无关的向量，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

都是 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s; 2\nu+2)$. □

**引理6.7** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且 $(m, 2s+\gamma, s)$ 满足(6.1)，那么

$$\mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu+\delta) \supset \mathscr{L}(m-1, 2s+1, s, \Gamma_1; 2\nu+\delta)$$

其中的 $\Gamma_1$ 在 $\delta=1$ 时取0，除非

$$2s+2 \leqslant m = \nu+s+\delta$$

和三种情形 "$\delta=0$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_z$"，"$\delta=1$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_z$"，和 "$\delta=2$" 之一出现.

**证明** 设 $P$ 是 $(m-1, 2s+1, s, \Gamma_1)$ 型子空间，可假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP = M(m-1, 2s+1, s).$$

令 $\sigma_1 = m-2s-2$ 和 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m)+\delta+3$. 从(6.1)得到 $\sigma_1 \geqslant 0$ 和 $\sigma_2 \geqslant 1$. 由引理6.3，存在 $P$ 的矩阵表示，仍记作 $P$，$\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(6.2)是非奇异矩阵，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$
\equiv\begin{cases}
\begin{bmatrix}
0 & I^{(s)} & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & \\
 & & & \alpha & & 1 \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & \alpha
\end{bmatrix}, \text{如果 } \delta=2 \text{ 而 } \nu+s-m+2=0, & (6.4)\\[2ex]
\begin{bmatrix}
0 & I^{(s)} & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & & \Sigma_2
\end{bmatrix}, \text{如果 } \delta\neq 2 \text{ 或 } \nu+s-m+2>0, & (6.5)
\end{cases}
$$

其中 $\Sigma_2$是（$\sigma_2-1$）×（$\sigma_2-1$）正则矩阵，它的定号部分的级数是 $\delta$.

我们记

$$
Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ Z \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ \sigma_2-1 \end{matrix},
$$

那么，当(6.5)出现时，有 $ZG_{2\nu+\delta}{}^tZ=\Sigma_2$. 我们分以下两种情形：

(i) $2s+2\leqslant m<\nu+s+\delta$,

(ii) $2s+2\leqslant m=\nu+s+\delta$.

先考虑情形（i）. 再分 $\delta=0$，$\delta=1$和 $\delta=2$三种情形.

(i－a) $\delta=0$. 这时 $\sigma_2\geqslant5$，并且 $\Sigma_2$的指数$\geqslant2$. 通过“合同”变换，可假定

$$
ZG_{2\nu+\delta}{}^tZ=\begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} & \\ & 0 & \\ & & \Sigma_4 \end{bmatrix},
$$

其中 $\Sigma_4$是（$\sigma_2-4$）×（$\sigma_2-4$）正则矩阵. 令 $z_i$（$i=1$，2，3，4）是 $Z$ 的第 $i$ 行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y+\alpha z_1+z_3 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y-\alpha z_2+z_4 \end{bmatrix}$$

都是（$m$，$2s+2$，$s$）型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+\delta)$.

(i-b)$\delta=1$. 这时 $\sigma_2 \geqslant 4$，并且 $\Sigma_2$的指数$\geqslant 1$. 我们可假定

$$ZG_{2\nu+\delta}{}^tZ \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \Sigma_5 \end{bmatrix}.$$

令 $z_i(i=1,2,3)$是 $Z$ 的第 $i$ 行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y+z_1+\alpha z_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y+\alpha^{1/2} z_3 \end{bmatrix}$$

是一对($m$，$2s+2$，$s$)型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+\delta)$.

(i-c)$\delta=2$. 这时 $\sigma_2 \geqslant 3$. 因为 $\nu+s-m+2>0$，所以有(6.5)出现. 再假设

$$ZG_{2\nu+\delta}{}^tZ \equiv \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \Sigma_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \sigma_2-3 \end{matrix}.$$

令 $z_i(i=1,2)$是 $Z$ 的第 $i$ 行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y+z_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y+z_2 \end{bmatrix}$$

是一对($m$，$2s+2$，$s$)型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+2)$.

其次考虑情形(ii). 我们也分 $\delta=0$，$\delta=1$和 $\delta=2$三种情形.

(ii-a)$\delta=0$. 这时 $\sigma_2=3$，并且 $\Sigma_2$是指数为1的$2\times 2$矩阵. 我们可假定

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

如同在引理6.6证明的情形（ii－a）一样，如果$\mathbb{F}_q \neq \mathbb{F}_2$，那么$Z$中存在两个线性无关的向量$z_1$和$z_2$，使得$z_1 G_{2\nu+\delta} {}^t z_1 = z_2 G_{2\nu+\delta} {}^t z_2 = \alpha$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y + z_1 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y + z_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+2, s)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P \in \mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu)$. 然而，如果$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_2$，那么$Z$中仅有一个向量$z$满足$z G_{2\nu+\delta} {}^t z = \alpha$，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ y + z \end{bmatrix}$$

是唯一包含$P$的$(m, 2s+2, s)$型子空间. 因此$P \notin \mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu)$.

（ii－b）$\delta = 1$. 这时$\sigma_2 = 2$，并且$\Sigma_2$是$1\times 1$正则矩阵. 可假定$Z = \langle z \rangle$和$z G_{2\nu+\delta} {}^t z = (1)$.

如果$\mathbb{F}_q \neq \mathbb{F}_2$，那么存在两个不同的元素$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}_q \setminus N$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y + \alpha_1^{1/2} z \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y + \alpha_2^{1/2} z \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+2, s)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P \in \mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu+1)$.

如果$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_2$那么如同引理6.6证明的情形（ii－a）一样，可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ y + z \end{bmatrix}$$

是唯一包含$P$的$(m, 2s+2, s)$型子空间. 因此$P \notin \mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu+1)$.

（ii－c）$\delta = 2$. 这时$\sigma_2 = 1$. 因为$\nu + s - m + 2 = 0$，所以(6.4)成

立. 如同引理6.6证明的情形(ii-a)一样,可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的$(m,2s+2,s)$型子空间. 因此 $P\in\mathscr{S}(m,2s+2,s;2\nu+2)$. □

**引理6.8** 设 $n-2\nu+\delta>m\geqslant 2$,并且$(m,2s+2,s)$满足(6.1),那么

$$\mathscr{S}(m,2s+2,s;2\nu+\delta)\supset\mathscr{S}(m-2,2s,s;2\nu+\delta),$$

除非

$$2s+2\leqslant m=\nu+s+\delta$$

成立时,"$\delta=1,\mathscr{P}_q=\mathscr{P}_2$"和"$\delta=2$"的情形之一出现.

**证明** 设 $P$ 是$(m-2,2s,s)$型子空间. 可假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP=M(m-2,2s,s).$$

令 $\sigma_1=m-2s-2$ 和 $\sigma_2=2(\nu-s-m)+\delta+4$. 从(6.1)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$. 由引理6.3,存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$,使得(6.2)是非奇异的,并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 正则矩阵,它的定号部分的级数是 $\delta$. 记 $Y$ 的第 $i$ 行为 $y_i$ $(i=1,2,\cdots)$. 我们分以下两种情形:

(i) $2s+2\leqslant m<\nu+s+\delta$,

(ii) $2s+2\leqslant m=\nu+s+\delta$.

在情形（i），如果 $\delta=0$，1，或2，就分别有 $\sigma_2\geqslant 6$，5，或4，于是

$$\Sigma_1 \text{ 的指数} \geqslant \begin{cases} 2, \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ 1 \ \ \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

如果 $\delta=0$或1，那么通过“合同”变换，可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} & \\ & 0 & \\ & & \Sigma_4 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_4$是级数为 $\sigma_2-4$的正则矩阵，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + \alpha y_3 \\ y_2 + y_3 + \alpha y_4 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 + \alpha y_3 + y_4 \\ y_2 + \alpha y_4 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+2,s)$型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in \mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+\delta)$. 如果 $\delta=2$，那么可以进一步假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \alpha & \\ & & & & \Sigma_5 \end{bmatrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_3 \\ y_2 + y_4 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+2,s)$型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in \mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+\delta)$.

现在考虑情形(ii). 我们再分 $\delta=0$，$\delta=1$和 $\delta=2$三种情形.

(ii－a)$\delta=0$. 这时 $\sigma_2=4$，并且 $\Sigma_1$的指数是2. 由情形(i)的证明，有同样的结论：$P\in \mathscr{L}(m.2s+2,s;2\nu+2)$.

(ii - b) $\delta=1$. 这时 $\sigma_3=3$，并且 $\Sigma_1$ 的指数是1，可假定

$$\Sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$，那么存在 $\alpha\in\mathbb{F}_q\backslash N$ 而 $\alpha\neq 1$. 于是

$$\begin{bmatrix}P \\ y_1+\alpha y_2 \\ y_2+\alpha^{1/2}y_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}P \\ \alpha y_1+y_2 \\ y_1+\alpha^{1/2}y_3\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P \\ y_1+\alpha^{1/2}y_3 \\ y_2+\alpha^{1/2}y_3\end{bmatrix}$$

是三个 $(m,2s+2,s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s;2\nu+1)$. 然而，如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$，那么 $\mathbb{F}_2\backslash N=\{1\}$. 显然，

$$\begin{bmatrix}P \\ y_1+y_2 \\ y_2+y_3\end{bmatrix} \tag{6.6}$$

是 $(m,2s+2,s)$ 型子空间. 而且容易验证

$$\begin{bmatrix}y_1+y_2 \\ y_2+y_3\end{bmatrix}$$

是 $Y$ 中唯一的 $(2,2,0)$ 型子空间. 按照引理6.6证明中情形（ii - a)，可以得到(6.6)是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s+2,s)$ 型子空间，因此 $P\notin\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+1)$.

(ii - c) $\delta=2$. 这时 $\sigma_2=2$，并且 $\Sigma_2$ 是 $2\times 2$ 定号矩阵. 可假定

$$\Sigma_2=\begin{bmatrix}\alpha & 1 \\ & \alpha\end{bmatrix}.$$

如同引理6.6证明中情形（ii - a）一样，可以证明

$$\begin{bmatrix}P \\ Y\end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s+2,s)$ 型子空间. 因此也有 $P\notin\mathscr{L}(m,2s$

$+2,s;2\nu+2)$. □

我们结合引理6.6,6.7和6.8，可以得到如下的一个引理：

**引理6.9** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant\gamma-\gamma_1>0$，并且 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(6.1). 如果 $\gamma=\delta=1$，再假定 $\Gamma=0$，而在 $\gamma_1=\delta=1$ 时，令 $\Gamma_1=0$. 那么

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-(\gamma-\gamma_1),2s-\gamma_1,s,\Gamma_1;2\nu+\delta).\end{aligned}$$

除非

$$2s+\gamma\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 }\delta\neq1\text{ 或 }\gamma\neq1,\\ \nu+s, & \text{如果 }\gamma=\delta=1\end{cases}\tag{6.7}$$

成立时，表6.1所列的情形之一出现：

**表 6.1**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_2$ |
| 0 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_2$ |
| 1 | 2 | 0 | $\mathbb{F}_2$ |
| 1 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_2$ |
| 2 | 2 | 0 | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_q$ |

**引理6.10** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，$s\geqslant1$，并且 $(m,2s,s)$ 满足(6.1). 那么

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,\Gamma_1;2\nu+\delta),\end{aligned}$$

其中 $\Gamma_1$ 在 $\delta=1$ 时为0，除非

$$2s\leqslant m=\nu-s$$

时，"$\delta=0$"，"$\delta=1$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$" 和 "$\delta=2$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$" 三种情形之一出现.

**证明** 设 $P$ 是 $(m-1, 2(s-1)+1, s-1, \Gamma_1)$ 型子空间. 可假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP \equiv M(m-1, 2(s-1)+1, s-1).$$

设 $\sigma_1 = m - 2s$ 和 $\sigma_2 = 2(\nu + s - m) + \delta + 1$. 从(6.1)得到 $\sigma_1 \geqslant 0$ 和 $\sigma_2 \geqslant 1$. 由引理 6.3, 存在 $\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$, 使得(6.2)是非奇异的, 并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu-1)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_2$ 是 $(\sigma_2 - 1) \times (\sigma_2 - 1)$ 正则矩阵, 它的定号部分的级数是 $\delta$(注意: 从 $\gamma = 0$ 和(6.1)得到 $\nu + s - m \geqslant 0$, 于是 $\delta = 2$ 和 $\nu + s - 1 - (m-1) - 1 = 0$ 的情形不会出现). 令

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ Z \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \sigma_2 - 1 \end{matrix},$$

那么 $zG_{2\nu+\delta}{}^tz = \Sigma_2$. 我们分以下两种情形:

(i) $2s \leqslant m < \nu + s$,

(ii) $2s \leqslant m = \nu + s$.

在情形(i), 有 $\sigma_2 \geqslant 3 + \delta$, 因而 $\Sigma_2$ 的指数 $\geqslant 1$. 设 $z$ 是 $Z$ 中的一个非零向量. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y + z \end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s,s)$ 型子空间,并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s,s;2\nu+\delta)$.

现在考虑情形(ii). 再分 $\delta=0,\delta=1$ 和 $\delta=2$ 三种情形.

(ii - $a$)$\delta=0$. 这时 $\sigma_2=1$. 类似于引理6.6证明中的情形 (ii - $a$),可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 P 的 $(m,2s,s)$ 型子空间,因此 $P \notin \mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$.

(ii - b) $\delta=1$. 这时 $\sigma_2=2$, 我们可假定 $Z=\langle z\rangle$ 和 $zG_{2\nu,\delta}{}^tz=\Sigma_2=(1)$. 如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$, 那么 $N$ 中存在一个非零元素 $\beta$, 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y+\beta^{1/2}z \end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s,s)$ 型子空间,并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m, 2s,s;2\nu+1)$. 然而,如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$,那么 $N=\{0\}$,类似于引理 6.6 证明中的情形(ii - a),可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s,s)$ 型子空间,因此 $P\notin\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+1)$.

(ii - c) $\delta=2$, 这时 $\sigma_2\geqslant3$, 可假定

$$\Sigma_2=\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{bmatrix}.$$

设 $z_1$ 和 $z_2$ 分别是 $Z$ 的第1和第2行. 如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$, 那么 $N$ 中可选取出非零元素 $\beta$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y+(\beta\alpha^{-1})^{1/2}z_1 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s,s)$ 型子空间,并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m, 2s,s;2\nu+2)$. 然而,如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$,那么 $N=\{0\}$,容易验证 $y$ 是 $Y$

中的唯一非零奇异向量．类似于引理 6.6 证明中的情形(ii-a)，可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s,s)$ 型子空间．因此 $P \notin \mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+2)$． □

**引理6.11** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，$s\geqslant 1$，并且 $(m,2s+1,s,\Gamma)$ 满足(6.1)．如果 $\delta=1$，再假定 $\Gamma=0$．那么

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)-2,s-1;2\nu+\delta),\end{aligned}$$

除非 $\delta=2$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$ 的情形和

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

出现．

**证明** 设 $P$ 是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间．不妨假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP\equiv M(m-1,2(s-1)+2,s-1).$$

令 $\sigma_1=m-2s-1$ 和 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+2$．从(6.1)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 2$．由引理6.3，存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(6.2)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\equiv\begin{bmatrix} M(2(s-1)+2,2(s-1)+2,s-1) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},\tag{6.8}$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 正则矩阵，它定号部分的级数是 $2-\delta$．设 $y_i$ $(i=$

1，2，…）是 $Y$ 的第 $i$ 行．我们分以下两种情形：

$$\text{(i)}\ 2s+1 \leqslant m < \begin{cases} \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \delta \neq 1, \\ \nu+s, & \text{如果 } \delta = 1; \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ 2s+1 \leqslant m = \begin{cases} \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \delta \neq 1, \\ \nu+s, & \text{如果 } \delta = 1. \end{cases}$$

在情形（i），如果 $\delta=0$ 或2，那么有 $\sigma_2\geqslant 4$；如果 $\delta=1$，那么 $\sigma_2\geqslant 5$．因为(6.8)合同于 $G_{2\nu+\delta}$，所以在通过“合同”变换后，可以假定

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_4 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_5 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_3+y_4 \end{bmatrix}$$

是一对（$m$，$2s+1$，$s$，$\Gamma$）型子空间，并且它们的交是 $P$．因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta)$．

现在来考虑情形(ii)．我们再分 $\delta=0$，$\delta=1$ 和 $\delta=2$ 三种情形．

（ii－a）$\delta=0$．这时 $\sigma_2=2$．并且 $\Sigma_1$ 是 $2\times 2$ 定号矩阵．于是可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{bmatrix}.$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathcal{M}(m, 2s+1, s; 2\nu)$.

(ii-b) $\delta=1$. 这时 $\sigma_2=3$，并且 $\Sigma_1$ 的指数是1. 因为(6.8)合同于 $G_{2\nu+1}$，所以在进行合同变换后，可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

现在断言：$e_{2\nu+1} \notin P$. 事实上，假定 $e_{2\nu+1} \in P$，那么可假定 $P$ 有形如

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} m-2 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2\nu & \quad 1 \end{matrix} \end{array}$$

的矩阵表示. 于是

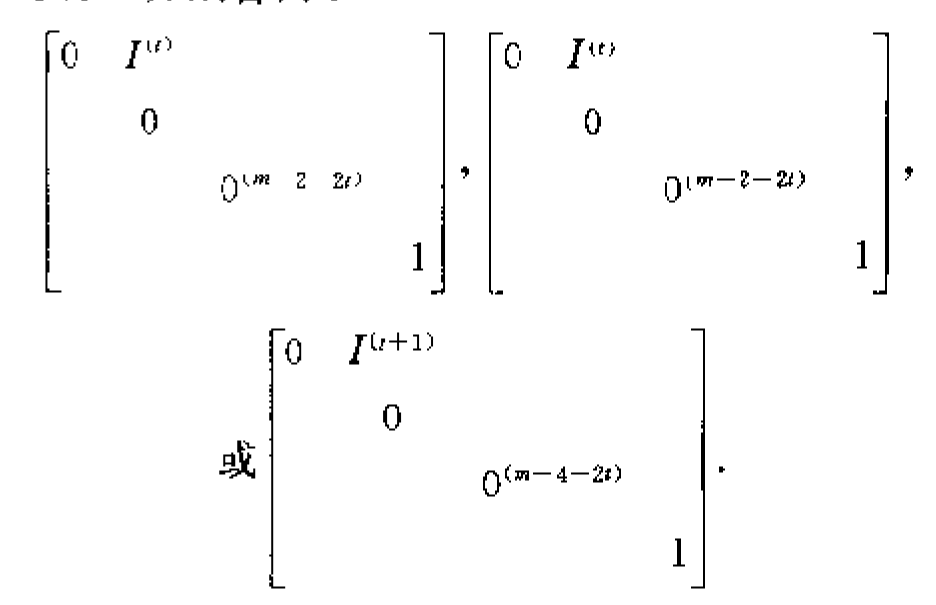
$$PG_{2\nu+1}{}^tP \equiv \begin{bmatrix} P_1G_{2\nu}{}^tP_1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

我们可假定 $P_1G_{2\nu}{}^tP_1$ 合同于

$$\begin{bmatrix} 0 & I^{(t)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(m-2-2t)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I^{(t)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(m-3-2t)} & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} 0 & I^{(t)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \alpha & \\ & & & & 0^{(m-4-2t)} \end{bmatrix}.$$

那么 $PG_{2\nu+1}{}^tP$ 分别合同于



这与 $P$ 是$(m-1,2(s-1)+2,s-1)$型子空间矛盾. 类似地

$$e_{2\nu+1} \notin \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s+1, s, 0)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$.

(ii-c)$\delta=2$. 这时 $\sigma_2=2$，并且 $\Sigma_1$ 的指数是1. 我们可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

如果$\mathbb{F}_q \neq \mathbb{F}_2$，那么按照引理6.6证明中的情形（ii-a），在 $Y$ 中存在两个线性无关的向量 $z_1$ 和 $z_2$，使得 $z_1G_{2\nu+2}{}^tz_1=z_2G_{2\nu+2}{}^tz_2=1$. 于是

$$\begin{bmatrix} P \\ z_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ z_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+1, s)$型子空间. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s; 2\nu+2)$.

然而，如果$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$，那么 $z=y_1+y_2$是 $Y$ 中满足 $zG_{2\nu+\delta}{}^tz=1$的唯一非零向量. 采用引理6.6证明中情形（ii-a）的方法，可以证

明

$$\begin{bmatrix} P \\ z \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m, 2s+1, s)$ 型子空间. 因此 $P \notin \mathscr{L}(m, 2s+1, s; 2\nu+2)$. □

**引理6.12** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 2, s\geqslant 2$, 并且 $(m, 2s, s)$ 满足 (6.1), 那么

$\mathscr{L}(m, 2s, s; 2\nu+\delta) \supset \mathscr{L}(m-2, 2(s-2)+2, s-2; 2\nu+\delta)$,

除非

$$2s \leqslant m = \nu + s$$

成立时, "$\delta=0$", 或"$\delta=1, \mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$"的情形出现.

**证明** 设 $P$ 是 $(m-2, 2(s-2)+2, s-2)$ 型子空间. 不妨假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP \equiv M(m-2, 2(s-2)+2, s-2).$$

令 $\sigma_1=m-2s$ 和 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\delta+2$. 从(6.1)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 2$. 由引理6.3, 存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$, 使得(6.2)是非奇异的, 并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} M(m-2, 2(s-2)+2, s-2) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & 0 & \\ & & & \Sigma_1 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\sigma_2\times\sigma_2$ 正则矩阵, 它的定号部分的级数是 $2-\delta$. 设 $y_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ 是 $Y$ 的第 $i$ 行. 我们分下列两种情形:

(i) $2s\leqslant m<\nu+s$,

(ii) $2s\leqslant m=\nu+s$.

在情形 (i), 我们有 $\sigma_2\geqslant\delta+4$. 因为 (6.9) 合同于 $G_{2\nu+\delta}$, 所

以在通过“合同”变换后，可假定

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_4 \end{bmatrix}.$$

其中 $\Sigma_4$ 是 $(\sigma_2-4)\times(\sigma_2-4)$ 正则矩阵，它的定号部分的级数是 $\delta$. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1+y_3 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2+y_4 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{S}(m,2s,s;2\nu+\delta)$.

现在来考虑情形(ii). 我们再分 $\delta=0$, $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 三种情形.

(ii-a) $\delta=0$. 这时 $\sigma_2=2$，并且 $\Sigma_1$ 是定号的. 按照引理6.6证明中的情形(ii-a)，可以证明

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的$(m,2s,s)$型子空间. 因此 $P\notin\mathscr{S}(m,2s,s;2\nu)$.

(ii-b) $\delta=1$，这时 $\sigma_2=3$. 因为(6.9)合同于 $G_{2\nu+1}$，所以可假定

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

按照引理6.8证明中的情形(ii-b)，如果$\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$，那么可证得 $P\in\mathscr{S}(m,2s,s;2\nu+1)$；如果$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$，那么 $P\notin\mathscr{S}(m,2s,s;2\nu+1)$.

(ii-c) $\delta=2$. 这时 $\sigma_2=4$. 因为(6.9)合同于 $G_{2\nu+2}$，所以在通过“合同”变换后，可假定

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix},$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

是一对 $(m, 2s, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s, s; 2\nu+2)$. □

我们也可结合引理6.10、6.11和6.12，又可得到如下的一个引理：

**引理6.13** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant\gamma_1-\gamma>0$, $s\geqslant\gamma_1-\gamma$, 并且 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 满足 (6.1). 如果 $\gamma=\delta=1$，再假定 $\Gamma=0$，而在 $\gamma_1=\delta=1$时，再令 $\Gamma_1=0$. 那么

$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$

$\supset\mathscr{L}(m-(\gamma_1-\gamma), 2(s-(\gamma_1-\gamma))+\gamma_1, s-(\gamma_1-\gamma), \Gamma_1; 2\nu+\delta)$,

除非(6.7)成立时，表6.2所列的情形之一出现.

**表 6.2**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_q$ |
| 0 | 0 | 2 | $\mathbb{F}_q$ |
| 1 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_2$ |
| 1 | 0 | 2 | $\mathbb{F}_7$ |
| 2 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_2$ |
| 2 | 1 | 2 | $\mathbb{F}_7$ |

□

## §6.3 格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$，$\Gamma\neq 1$

让我们来研究格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$ 之间一般的包含关系. 首先考虑“$\delta=1$ 或 $\gamma\neq 1$ 时，$\Gamma=\phi$”和“$\gamma=\delta=1$ 时，$\Gamma=0$”的情形. 仿照定理5.9的证明，运用引理6.4，6.5，6.9和6.13可得

**定理6.14** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，并且 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 和 $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 分别满足

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s-\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 }\delta\neq 1\text{ 或 }\gamma\neq 1,\\ \nu+s, & \text{如果 }\gamma=\delta=1,\end{cases} \tag{6.10}$$

和

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1\leqslant\begin{cases}\nu+s_1+\min\{\gamma_1,\delta\}, & \text{如果 }\delta\neq 1\text{ 或 }\gamma_1\neq 1,\\ \nu+s_1 & \text{如果 }\gamma_1=\delta=1,\end{cases},$$

而 $m\neq n$，$\Gamma\neq 1$（也即，当 $\gamma=\delta=1$ 时，有 $\Gamma=0$）和 $\Gamma_1\neq 1$. 如果(6.7)

$$2s+\gamma\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\min\{\gamma,\delta\}, & \text{如果 }\delta\neq 1\text{ 或 }\gamma\neq 1,\\ \nu+s & \text{如果 }\gamma=\delta=1,\end{cases}$$

成立时，表6.3所列的各种情形不出现. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta) \tag{6.11}$$

的充分必要条件是

$$2m-2m_1\geqslant(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)+|\gamma-\gamma_1|\geqslant 2|\gamma-\gamma_1|. \tag{6.12}$$

**定理6.15** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$. 假定 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 满足(6.7)和 $\Gamma\neq 1$，并且 $m\neq n$. 而 $(m,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 满足(6.10)和(6.12)而 $\Gamma_1\neq 1$. 如果表6.3所列的情形之一出现，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)\not\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta). \tag{6.13}$$

**表 6.3**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $\mathbb{F}_q$ | $m_1$ | $s_1$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_q$ | $m-t-1$ | $s-t-1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 0 | 0 | 2 | $\mathbb{F}_q$ | $m-t-2$ | $s-t-2$ | $0\leqslant t\leqslant s-2$ |
| 0 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 0 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t-1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 1 | 0 | 2 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-2$ | $s-t-2$ | $0\leqslant t\leqslant s-2$ |
| 1 | 2 | 0 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-2$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 2 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t-1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 2 | 1 | 2 | $\mathbb{F}_2$ | $m-t-1$ | $s-t-1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 2 | 2 | 0 | $\mathbb{F}_q$ | $m-t-2$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 2 | 2 | 1 | $\mathbb{F}_q$ | $m-t-1$ | $s-t$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |

□

**证明** 我们只对表6.3中的第3行，第7行，第9行和第6行逐一进行验证. 其余8行的验证，留给读者作为练习. 从表6.3知道，应分$\gamma-\gamma_1>0$和$\gamma-\gamma_1<0$两种情形.

(a) $\gamma-\gamma_1>0$. 这时$m_1=m-t-(\gamma-\gamma_1)$，$s_1=s-t$. 由$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(6.7)和$\Gamma\neq 1$，而$\Gamma_1\neq 1$，并且$(m_1,2s_1+\gamma,s_1,\Gamma_1)$满足(6.10)

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1\leqslant\begin{cases}\nu+s_1-\min\{\gamma_1,\delta\}, & \text{如果 } \delta\neq 1 \text{ 或 } \gamma\neq 1,\\ \nu+s_1, & \text{如果 } \gamma_1=\delta=1.\end{cases}$$

因而$\mathcal{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta)\neq\varphi$. 令$P\in\mathcal{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta)$. 不妨设

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP=\begin{bmatrix}M(2s_1+\gamma_1,2s_1+\gamma_1,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m+t-(2s+\gamma)$. 令$\sigma_2=2(\nu+s-m)+2\gamma-\gamma_1+\delta$

下面对表6.3的第3行和第7行分别进行推导.

(a-1) 第3行. 这时 $\delta=0$, $\gamma=1$, $\gamma_1=0$, $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_{\gamma}$. 从(6.7)可得 $\sigma_1\geqslant t$ 和 $\sigma_2=2$. 由引理6.3, 存在 $\sigma_1\times 2\nu$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2\times 2\nu$ 矩阵 $Y$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{6.14}$$

其中 $\Sigma_2$是 $\sigma_2\times\sigma_2$正则矩阵. 因为 $\Sigma_2$的指数是1. 所以不妨设 $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, 而使得

$$YG_{2\nu}{}^tY \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中包含 $P$ 的 $m$ 维子空间 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1v_1 \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}v_{t+1} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

其中 $x_i\in X, a_i\in\mathbb{F}_q, v_i\in Y, i=1,2,\cdots,t+1$. 记

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s & 2t \\ m+t-2s-1 & \end{matrix},$$

那么从(6.14)得到 $P_1(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}){}^tX=0, P_2(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}){}^tX=I^{(m+t-2s-1)}$,并且

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1v_1 \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}v_{t+1} \end{bmatrix} G_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1v_1 \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}v_{t+1} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu-t)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & P_\gamma(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} \\ & & & \begin{bmatrix} a_1v_1 \\ \vdots \\ a_{t+1}v_{t+1} \end{bmatrix} G_{2\nu} \begin{bmatrix} av_1 \\ \vdots \\ a_{t+1}v_{t+1} \end{bmatrix}^t \end{bmatrix}.
$$

如果(6.15)是$(m,2s+1,s)$型子空间，那么

$$
\text{rank}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = t.
$$

因而可假定向量$x_1,\cdots,x_t$线性无关，$x_{t+1}=0$，$v_{t+1}\neq 0$，并且

$$
(a_{t+1}v_{t+1})G_{2\nu}{}^t(a_{t+1}v_{t+1}) = 1.
$$

因为$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$，类似于引理6.6证明中情形(ii - a)，所以$Y$中的$a_{t+1}v_{t+1}$可唯一地表为$y_1+y_2$。因此形为(6.15)的$Q$具有形式

$$
\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}, \tag{6.16}
$$

其中$x_1$，…，$x_t$是$X$中线性无关的向量。显然，形为(6.16)的子空间的交不是$P$。因而(6.13)成立。

(a -2) 第7行。这时$\delta=1$，$\gamma=2$，$\gamma_1=0$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$。从(6.7)得$\sigma_2=3$。由引理6.3，存在$\sigma_1\times(2\nu+1)$矩阵$X$，$\sigma_2\times(2\nu+1)$矩阵$Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+1} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-t)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & 0 & \\ & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{6.17}$$

其中 $\Sigma_2$是 $\sigma_2 \times \sigma_2$正则矩阵，其定号部分的级数是1. $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中包含 $P$ 的 $m$ 维子空间 $Q$ 具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + a_1 v_1 \\ \vdots \\ x_{t+2} + a_{t+2} v_{t+2} \end{bmatrix}.$$

其中 $x_i \in X, v_i \in Y, a_i \in \mathbb{F}_2, i = 1, 2, \cdots, t+1, t+2$. 如果 $Q$ 是$(m, 2s+2, s)$型子空间，那么从(6.17)可知 $Q$ 具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 + a_1 v_1 \\ \vdots \\ x_t + a_t v_t \\ a_{t+1} v_{t+1} \\ a_{t+2} v_{t+2} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

其中 $x_1, \cdots, x_t$ 线性无关，而 $a_{t+1} v_{t+1}, a_{t+2} v_{t+2}$也线性无关. 因为(6.17)合同于 $G_{2\nu+1}$，所以存在 $B \in GL_3(\mathbb{F}_q)$，使得

$$(BY) G_{2\nu+1} {}^t(BY) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

令 $BY$ 的第1、第2和第3行依次是 $y_1$，$y_2$，$y_3$. 类似于引理6.8证明中情形（ii－b），可知

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

是 $Y$ 中唯一的 (2, 2, 0) 型子空间. 于是形如(6.18)的 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1v_1 \\ \vdots \\ x_t+a_tv_t \\ y_1+y_2 \\ y_2+y_3 \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

其中 $x_1+a_1v_1,\cdots,x_t+a_tv_t$ 线性无关. 而形式为(6.19)的子空间的交不是 $P$. 因此(6.13)成立.

(b) $\gamma-\gamma_1<0$. 这时 $m_1=m-t-(\gamma_1-\gamma)$, $s_1=s-t-(\gamma_1-\gamma)$. 由$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(6.7)和 $\Gamma\neq 1$, 而 $\Gamma_1\neq 1$, 并且$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$满足(6.10), 那么 $\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta)\neq\phi$. 设 $P\in\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1;2\nu+\delta)$. 不妨假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP=\begin{bmatrix} M(2s_1+\gamma_1,2s_1+\gamma_1,s_1) & \\ & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m+t-(2s-\gamma)$. 令 $\sigma_2=2(\nu+s-m)+\gamma_1+\delta$. 我们对表6.3的第9行和第6行分别进行讨论

(b-1) 第9行. 这时 $\delta=2,\gamma=0,\gamma_1=1,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$, 从(6.7)得到 $\sigma_1\geqslant t$, $\sigma_2=3$. 由引理6.3, 存在 $\sigma_1\times(2\nu+2)$矩阵 $X$, $1\times(2\nu+2)$矩阵 $Y=(y)$和$(\sigma_2-1)\times(2\nu+2)$矩阵 $Z$, 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} G_{2\nu+2} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & I^{(s-t-1)} & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & & \alpha \end{array}\right]. \tag{6.20}$$

$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中包含 $P$ 的 $m$ 维子空间具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} Q \\ x_1+a_1y+b_1z_1 \\ \vdots \\ x_{t+1}+a_{t+1}y+b_{t+1}z_{t+1} \end{bmatrix}, \qquad (6.21)$$

其中 $x_i\in X$、$a_i,b_i\in\mathbb{F}_2$，$z_i\in Z$，$i=1,2,\cdots,t+1$. 如果 $Q$ 是 $(m,2s,s)$ 型子空间，那么类似于引理6.10证明中情形(ii-c)，由(6.20)可知(6.21)的 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x_1+a_1z_1 \\ \vdots \\ x_t+a_tz_t \\ Y \end{bmatrix},$$

其中 $x_1+a_1z_1,\cdots,x_t+a_tz_t$ 线性无关. 显然，上述 $Q$ 的交不是 $P$. 因此(6.13)成立.

(b-2) 第6行. 这时 $\delta=1$，$\gamma=0$，$\gamma_1=2$，$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 从(6.7)得到 $\sigma_2=3$. 由引理6.3，存在 $\sigma_1\times(2\nu+1)$ 矩阵 $X$，$\sigma_2\times(2\nu+1)$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+1} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu-t-2)} & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & \alpha & 1 & & & & & \\ & & & \alpha & & & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.22)$$

$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中包含 $P$ 的 $m$ 维子空间 $Q$ 具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + a_1 v_1 \\ \vdots \\ x_{t+2} + a_{t+2} v_{t+2} \end{bmatrix}, \tag{6.23}$$

其中 $x_i \in X$, $v_i \in Y$, $a_i \in \mathbb{F}_q$, $i = 1, 2, \cdots, t+2$. 如果 $Q$ 是 $(m, 2s, s)$ 型子空间，类似于引理6.8证明中情形（ii－b），那么由(6.22)可知(6.23)的 $Q$ 具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + a_1 v_1 \\ \vdots \\ x_t + a_t v_t \\ y_1 + y_2 \\ y_3 + y_3 \end{bmatrix},$$

其中 $x_1 + a_1 v_1, \cdots, x_t - a_t v_t$ 线性无关，而 $y_1$，$y_2$和 $y_3$依次是 $Y$ 的第1、第2和第3行．显然，如上 $Q$ 的交不是 $P$．因此(6.13)成立．

□

下面给出$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间在格 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$中的条件．

**定理6.16** 设 $n = 2\nu + \delta \geqslant 1$，并且$(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$满足(6.10)，而 $m \neq n$ 和 $\Gamma \neq 1$. 如果

$$2s + \gamma \leqslant m < \begin{cases} \nu + s + \min\{\gamma, \delta\}, & \text{如果 } \delta \neq 1 \text{ 或 } \gamma \neq 1, \\ \nu + s, & \text{如果 } \gamma = \delta = 1 \end{cases} \tag{6.24}$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有$(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1)$型子空间组成，其中（$m_1$，$2s_1+\gamma_1$，$s_1$，$\Gamma_1$）满足(6.12)和$\Gamma_1 \neq 1$，如果(6.7)成立，那么 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有$(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1)$型子空间组成，其中$(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1)$满足(6.12)和 $\Gamma_1 \neq 1$，并且它们不列入表6.3中.

**证明** 类似于定理5.11的证明过程. 利用定理6.14和定理6.15就可给出本定理的证明. 这里略去其详细步骤. □

从定理6.16可得如下的

**推论6.17** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(6.10)和$\Gamma\neq 1$. 那么

$$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_3^{(\Gamma)}}X$是$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$的最大元，除非表6.4所列的情形之一出现.

**表 6.4**

| $n$ | $\nu$ | $\delta$ | $m$ | $s$ | $\gamma$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | $\mathbb{F}_2$ |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | $\mathbb{F}_2$ |

**证明** 我们把$\{0\}$考虑为$(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$型子空间，其中$m_1=s_1=\gamma_1=0$和$\Gamma_1=\phi$. 由定理6.16可知，$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$，除非(6.7)成立时，表6.3中所列$\gamma_1=0$的情形出现. 现在逐一地核对表6.3中$\gamma_1=0$的3行.

对于第3行，$\delta=0$，$\gamma=1$，$m=t+1$，$s=t$ 和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 由(6.7)有$m=\nu+s$. 因而$\nu=1$和$n=2$. 但$n>m\geqslant 1$，所以$m=1$，$s=0$. 这正是表6.4中的第一行.

对于第7行，$\delta=1$，$\gamma=2$，$m=t+2$，$s=t$ 和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 由(6.7)有$m=\nu+s+1$. 因而$\nu=1$和$n=3$. 但$n>m$ 和 $m=t+2\geqslant 2$，所以$m=2$，$s=t=0$. 这正是表6.4中的第2行.

对于第11行，$\delta=2$，$\gamma=2$，$m=t+2$，$s=t$. 由(6.7)有$m=\nu+s+2$. 因而$\nu=0$和$n=2$. 但$m=t+2\geqslant 2$，这与题设$m<n$矛盾. □

类似于推论5.13，又有

**推论6.18** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$满足(6.10)，而$m\neq n$ 和 $\Gamma\neq 1$. 再设$P$是属于$\mathscr{L}(m,2s+\gamma,s,\Gamma;2\nu+\delta)$的子空间，

而 $Q$ 是包含在 $P$ 中的真子空间. 那么 $Q \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$. □

设 $n=2\nu+\delta \geqslant 1$, 并且 $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 满足(6.10), 而 $m \neq n$ 和 $\Gamma \neq 1$. 按照有限格 $L$ 的特征多项式(见定义1.10), 可给出格 $\mathscr{L}_3^{(\Gamma)} = \mathscr{L}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$ 的特征多项式. 令 $N(m_1, 2s_1-\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta) = |\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta)|$. 我们有

**定理6.19** 设 $n=2\nu+\delta \geqslant 1$, $(m, 2s+\gamma, s, \Gamma)$ 满足(6.24), 而 $\Gamma \neq 1$ 和 $m \neq n$.

(a) 如果 $\gamma=0$, 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m, 2s, s; 2\nu+\delta), t) = \sum_{\gamma_1=0,1,2}\left[\sum_{s_1=s-\gamma_1+1}^{\nu} \sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{l} + \sum_{s_1=0}^{s-\gamma_1} \sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{l}\right] N(m_1, 2s_1-\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta) g_{m_1}(t),$$

其中 $\Gamma_1 \neq 1$, $g_{m_1}(t)=(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{m_1-1})$ 是 Gauss 多项式, 而

$$l = \begin{cases} \nu+s_1+\min\{\gamma_1, \delta\}, & \text{如果 } \gamma_1 \neq 1 \text{ 或 } \delta \neq 1, \\ \nu+s_1, & \text{如果 } \gamma_1=\delta=1. \end{cases} \tag{6.25}$$

(b) 如果 $\gamma=1$, 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m, 2s+1, s, \Gamma; 2\nu+\delta), t) = \sum_{\gamma_1=0,1,2}\left[\sum_{s_1=s-[\gamma_1/2]-1}^{\nu} \sum_{m_1=2s_1-\gamma_1}^{l} + \sum_{s_1=0}^{s-[\gamma_1/2]} \sum_{m_1=m-s+s_1-[(2-\gamma_1)/2]+1}^{l}\right] N(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta) g_{m_1}(t),$$

其 $\Gamma_1 \neq 1$. $g_{m_1}(t)$ 是 Gauss 多项式, 而 $l$ 由(6.25)确定.

(c) 如果 $\gamma=2$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m, 2s+2, s; 2\nu+\delta), t) = \sum_{\gamma_1=0,1,2}\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu} \sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{l} + \sum_{s_1=0}^{s} \sum_{m_1=m-s+s_1+\gamma_1+1}^{l}\right] N(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta) g_{m_1}(t),$$

其中$\Gamma_1 \neq 1$，$g_{m_1}(t)$是Gauss多项式，而$l$由(6.25)确定.

**证明** 定理6.19的证明，类似于定理3.11的证明. 这里略去其详细过程. □

注意，$N(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+\delta)$的准确表示公式，已由冯绪宁和戴宗铎在文献［10］中给出，也可参见文献［28］和［32］.

## §6.4 格$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$

在这一节我们来考虑$n=2\nu+1$，$\gamma=\Gamma=1$的情形，它也有§6.3中的一些相应结果.

**定理6.20** 设$n=2\nu+1$和$\Gamma_1 \neq 1$，那么

$$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1) \cap \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+1) = \{\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}\}. \tag{6.26}$$

**证明** 如果$(m, 2s+1, s, 1)$和$(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1)$中至少有一个不满足(6.10)，那么它们所对应轨道$\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$或$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+1)$是空集. 于是(6.26)成立.

如果$(m, 2s+1, s, 1)$和$(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1)$都满足(6.10)，那么$\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$和$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+1)$都非空. 因为$\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$中的每个子空间都包含$e_{2\nu+1}$，所以$\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$中任一子空间集的交也包含$e_{2\nu+1}$. 然而，$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma_1; 2\nu+1)$中没有一个子空间包含$e_{2\nu+1}$. 因此(6.26)成立. □

**定理6.21** 设$n=2\nu+1>m\geqslant 1$. 假定$(m, 2s+1, s, 1)$和$(m_1, 2s_1+1, s_1, 1)$分别满足

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s+1 \tag{6.27}$$

和

$$2s_1+1 \leqslant m_1 \leqslant \nu+s_1+1.$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1) \supset \mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,1;2\nu+1)$$

的充分必要条件是

$$m-m_1 \geqslant s-s_1 > 0. \tag{6.28}$$

**证明** 完全仿照定理3.4的证明进行. 在证明充分性时，要连续地应用引理6.4和引理6.5就可得到所证的结论. 这里不再多加叙述. □

**定理6.22** 设 $n=2\nu+1$，并且$(m,2s+1,s,1)$满足(6.27)

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s-1$$

和 $m \neq n$. 假设$\overline{\mathscr{L}_3^{(1)}}$和$\overline{\mathscr{L}_1}$分别表示$2\nu+1$维正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中所有格 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$所成的集合和$2\nu$维辛空间中所有格$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$所成的集合. 那么

$$\psi: \overline{\mathscr{L}_3^{(1)}} \longrightarrow \overline{\mathscr{L}_1},$$

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1) \longmapsto \mathscr{L}(m,s;2\nu)$$

是保持格之间包含关系的双射.

**证明** 显然，$\psi$ 是双射. 至于这个映射 $\psi$ 的保序性，可以从上面的定理6.21和前面的定理3.4得到. □

**定理6.23** 设 $n=2\nu+1$，并且$(m,2s+1,s,1)$满足(6.27)

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s+1$$

和 $m \neq n$. 那么 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 和满足(6.28)

$$m-m_1 \geqslant s-s_1 \geqslant 0$$

的所有$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$型子空间组成.

**证明** 按照定理3.5的证明，运用定理6.21，就可给出本定理的证明. □

**推论6.24** 设 $n=2\nu+1>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+1,s,1)$满足(6.27). 再令 $\mathscr{M}_3^{(1)}=\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$，那么

$$\{0\} \notin \mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),$$

但

$$\langle e_{2\nu+1}\rangle \in \mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),$$

并且 $\langle e_{2\nu+1}\rangle = \bigcap\limits_{X\in\mathscr{M}_3^{(1)}} X$ 是 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$的最大元.

**证明** 本推论的第一个结论是显然的. 对于第二个结论，只需在定理6.23中取 $(m_1, 2s_1+1, s_1, 1) = (1, 1, 0, 1)$ 即可. □

**定理6.25** 设 $n=2\nu+1$，并且 $(m,2s+1,s,1)$ 满足(6.27)

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s+1.$$

那么格 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$ 同构(格同构)于格 $\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$，其中 $\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上 $2\nu$ 维辛空间中由 $(m-1,s)$ 型子空间生成的格.

**证明** 如果 $m=n$，那么 $\mathscr{L}(2\nu+1, 2\nu+1, \nu, 1; 2\nu+1) = \{\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}\}$ 和 $\mathscr{L}(2\nu,\nu;2\nu)=\{\mathbb{F}_q^{(2\nu)}\}$. 所以本定理自然成立.

现在假设 $m\neq n$. 令 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$ 和 $P\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$，那么由定理6.23、$P$ 是满足(6.28)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0$$

的 $(m_1,2s_1+1,s_1,1)$ 型子空间. 因为 $e_{2\nu+1}\in P$，所以可以选择 $P$ 的一个矩阵表示.

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} m_1-1 \\ 1 \end{matrix} \qquad (6.29)$$
$$\begin{matrix} \quad 2\nu & 1 \end{matrix}$$

使得

$$P_1\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ & 0 \end{bmatrix}{}^tP_1 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(m_1-1-2s_1)} \end{bmatrix}.$$

因而

$$P_1\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{bmatrix}{}^tP_1 = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ I^{(s_1)} & 0 & \\ & & 0^{(m_1-1-2s_1)} \end{bmatrix}.$$

于是 $P_1$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m_1-1,s_1)$ 型子空间.

规定一个映射

$\phi:\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\longrightarrow\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)} &\longmapsto \mathbb{F}_q^{(2\nu)} \\ P &\longmapsto P_1, \end{aligned}$$

其中 $P$ 是具有形式(6.29)的$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$型子空间，而$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$满足 $m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0$. 易知，$\varphi$是一个单射，并且保持格的偏序关系. 下面证明 $\varphi$是一个满射，因而 $\varphi$是 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$到 $\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$的格同构映射.

设$Q_1$是$\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$中的任一个元素，如果$Q_1=\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$，就令$Q=\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$，所以$\varphi(Q)=Q_1$，下面假设$Q_1\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$. 由定理3.5，可知$Q_1$是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的（$m_1$，$s_1$）型子空间，使得

$$m-1-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0.$$

令

$$Q=\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} m_1 \\ 1 \end{matrix}.$$
$$\qquad\begin{matrix} 2\nu & 1 \end{matrix}$$

我们来证明$Q\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$. 显然，我们有

$$QG_{2\nu+1}{}^tQ\equiv\begin{bmatrix} Q_1G_{2\nu}{}^tQ_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

再令

$$Q_1G_{2\nu}{}^tQ_1=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(m_1-2s_1)} \end{bmatrix}+R, \tag{6.31}$$

其中$R$是一个$m_1\times m_1$矩阵. 因为$Q_1$是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的$(m_1,s_1)$型子空间，所以又可假定

$$Q_1\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{bmatrix}{}^tQ=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ I^{(s_1)} & 0 & \\ & & 0^{(m_1-2s_1)} \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

从(6.31)和(6.32)得到${}^tR=R$. 再从(6.30)，(6.31)和${}^tR=R$，得到

$QG_{2\nu+1}{}^tQ$

$$
=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{s_1}\end{bmatrix} & I^{(s_1)} & & \\
& \begin{bmatrix}\gamma_{s_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{2s_1}\end{bmatrix} & & \\
& & \begin{bmatrix}\gamma_{2s_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{m_1}\end{bmatrix} & \\
& & & 1
\end{bmatrix}.
$$

熟知[8]，

$$
\begin{bmatrix}
\gamma_{2s_1+1} & & & \\
& \ddots & & \\
& & \gamma_{m_1} & \\
& & & 1
\end{bmatrix}
$$

合同于

$$
\begin{bmatrix}
0^{(m_1-2s_1)} & \\
& 1
\end{bmatrix},
$$

并且

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{s_1}\end{bmatrix} & I^{(s_1)} \\
& \begin{bmatrix}\gamma_{s_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{2s_1}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

合同于

$$\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} \\ & 0 \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1-1)} & & \\ & 0 & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

但我们又知[8]，

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

是合同的，所以

$$QG_{2\nu+1}{}^tQ = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(m_1-2s_1)} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $Q$ 是$(m_1+1, 2s_1+1, s_1, 1)$型子空间. 因为 $m-(m_1+1)\geqslant s-s_1\geqslant 0$. 所以 $Q\in\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$. 显然，$\varphi(Q)=Q_1$，也即，$\varphi$ 是满射. □

由定理6.25可得到格 $\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$ 的特征多项式.

**推论6.26** 设 $n=2\nu+1$，$(m, 2s+1, s, 1)$满足 $m\neq n$ 和(6.27)

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1.$$

那么

$$\chi(\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1), t) = \chi(\mathscr{L}(m-1, s; 2\nu), t).$$

□

应注意：$\chi(\mathscr{L}(m-1, s; 2\nu), t)$ 的表示式，已由定理3.11给出.

由定理6.25与前面的定理3.9和定理3.10，又可得到

**定理6.27** 设 $n=2\nu-1$，$(m, 2s+1, s, 1)$满足(6.27)

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$$

和$2\leqslant m\leqslant 2\nu$. 在集合$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$中，如果按包含关系来规定它的偏序$\geqslant$，那么$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$是有限几何格. □

**定理6.28** 设$n=2\nu+1$,$(m,2s+1,s,1)$满足(6.27)和$2\leqslant m\leqslant 2\nu$.如果按反包含关系来规定集合$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$的偏序,那么

(i) $\mathscr{L}(2,1,0,1;2\nu+1)$是有限几何格;

(ii) $\mathscr{L}(2\nu,2(\nu-1)+1,\nu-1,1;2\nu+1)$是有限几何格;

(iii) 对于$3\leqslant m\leqslant 2\nu-1$,$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$是有限原子格,但它不是几何格. □

## §6.5 注记

本章是根据参考文献[14]编写的,其中的所有引理,定理6.14的充分性,定理6.16,定理6.19,定理6.20,定理6.21的充分性,定理6.22—23,定理6.25,定理6.27和所有的推论都取自该文.

本章的主要参考资料有:参考文献[14],[28]和[32].

# 第七章　伪辛群作用下子空间轨道生成的格

## §7.1　伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下子空间轨道生成的格

本章中仍假定$\mathbb{F}_q$ 是 $q$ 个元素的有限域，$q$ 是2的幂. 设 $n=2\nu+\delta$，其中 $\nu$ 是非负整数，而 $\delta=1,2$. 令

$$K=\begin{bmatrix}0 & I^{(\nu)}\\ I^{(\nu)} & 0\end{bmatrix}$$

熟知[28]，$\mathbb{F}_q$ 上的 $n\times n$ 非奇异的非交错对称矩阵，对应于 $\delta=1$或2，分别合同于

$$S_1=\begin{bmatrix}K & \\ & 1\end{bmatrix}\quad 或\quad S_2=\begin{bmatrix}K & & \\ & 0 & 1\\ & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

我们用 $S_\delta$ 泛指上述两种情形，其中 $\delta=1$或2.

**定义7.1**　$\mathbb{F}_q$ 上满足

$$TS_\delta{}^tT=S_\delta$$

的全体 $n\times n$ 矩阵 $T$ 对于矩阵的乘法作成一个群，称为$\mathbb{F}_q$ **上关于 $S_\delta$ 的 $n$ 级伪辛群**，记作 $Ps_n(\mathbb{F}_q)$或 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$.　□

$2\nu+\delta$ 维行空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 与伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$在它上面的作用一起称为$\mathbb{F}_q$ 上的$2\nu+\delta$ **维伪辛空间**.

设 $P$ 是$2\nu+\delta$ 维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的 $m$ 维子空间. 易知[28]，$PS_\delta{}^tP$合同于如下之一的标准形：

$$M(m,2s,s)=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ I^{(s)} & 0 & \\ & & 0^{(m-2s)} \end{bmatrix},$$

$$M(m,2s+1,s)=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & \\ I^{(s)} & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0^{(m-2s-1)} \end{bmatrix},$$

和

$$M(m,2s+2,s)=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & & 0^{(m-2s-2)} \end{bmatrix}.$$

我们用符号 $M(m,2s+\tau,s)$ 泛指这三种情形，其中 $0\leqslant s\leqslant[(m-\tau)/2]$，而 $\tau=0,1$，或2. 当 $PS_\delta{}^tP$ 合同于 $M(m,2s+\tau,s)$ 时，就称 $P$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $S_\delta$ 的 $(m,2s+\tau,s,\epsilon)$ **型子空间**，其中 $\tau=0,1$，或2，而 $\epsilon=0$ 或1分别由 $e_{2\nu+1}\notin P$ 或 $e_{2\nu+1}\in P$ 来确定. 这里的 $e_{2\nu+1}$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中第 $2\nu+1$ 个分量为1，而其余分量为0的向量. 如果矩阵 $S_\delta$ 和向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 可以从上下文看出时，就简单说 $P$ 是 $(m,2s+\tau_1,s,\epsilon)$ 型子空间. $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的**向量** $v$ 称为**迷向的**或**非迷向的**，如果分别有 $vS_\delta{}^tv=0$ 或 $vS_\delta{}^tv\neq0$. 显然，$v$ 是迷向(非迷向)向量当且仅当由 $v$ 生成的子空间 $\langle v\rangle$ 是全迷向(非迷向)的.

文献[28]的定理4.11在后面要多次用到，我们把它写成如下的

**定理7.1** $\mathbb{F}_q$ 上 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $S_\delta$ 的 $(m, 2s+\tau, s, \epsilon)$ 型子空间存在，当且仅当

$$(\tau,\epsilon)=\begin{cases}(0,0),(1,0),(1,1),\text{或}(2,0), & \text{如果 } \delta=1,\\ (0,0),(0,1),(1,0),(2,0),\text{或}(2,1), & \text{如果 } \delta=2\end{cases} \tag{7.1}$$

和

$$2s+\max\{\tau,\varepsilon\}\leqslant m\leqslant\nu+s+[(\tau+\delta-1)/2]+\varepsilon.\square \tag{7.2}$$

易知(见文献[28]的推论4.4和推论4.6)，伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上，仅有 $e_{2\nu+1}$和它的纯量积在 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 的每个元素作用下固定. 我们用 $\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$表示$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $S_\delta$ 的全体$(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$型子空间所成的集合. 根据文献 [28] 的定理4.12，$\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的子空间集在伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$作用下的轨道. 再用$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$表示由轨道$\mathscr{M}$ $(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$ 生成的格.

**定义7.2** 格 $\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$称为伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下**子空间**轨道 $\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$**生成**的格.

如果轨道 $\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$和格 $\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$确定后，为了书写简单，有时把它们分别简单地记为 $\mathscr{M}_4^{(\delta,\varepsilon)}$和 $\mathscr{L}_4^{(\delta,\varepsilon)}$.

由推论2.9，可得

**定理7.2** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，并且$(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$满足(7.1)

$$(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}(0,0),(1,0),(1,1),\text{或}(2,0), & \text{如果}\ \delta=1,\\(0,0),(0,1),(1,0),(2,0),\text{或}(2,1), & \text{如果}\ \delta=2\end{cases}$$

和(7.2)

$$2s+\max(\tau,\varepsilon)\leqslant m\leqslant\nu+s+[(\tau+\delta-1)/2]+\varepsilon.$$

那么 $\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$是一个有限原子格，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和 $\bigcap_{X\in\mathscr{M}_4^{(\delta,\varepsilon)}}X$ 分别是它的最小元和最大元，而 $\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$是它的原子集.

## §7.2 同构定理

在第三章中，已经用 $\mathscr{M}(m,s;2\nu)$表示$\mathbb{F}_q$ 上$2\nu$ 维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$

中全体$(m,s)$型子空间所成的集合，而$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$表示由轨道$\mathscr{M}(m,s;2\nu)$生成的格. 现在来研究一些格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$和$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$间的同构关系.

**定理7.3** 设$n=2\nu+1$，并且$2s\leqslant m\leqslant \nu+s$，那么$m\neq n$，并且有格同构

$$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)\cong \mathscr{L}(m,s;2\nu).$$

**证明** 由$\delta=1$和$2s\leqslant m\leqslant \nu+s$，有$m\neq n$. 而$(m,2s,s,0)$满足(7.1)和(7.2)，所以$\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+1)\neq\phi$. 对于任意$P\in\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+1)$，那么$P$中所有向量的最后一个分量必为零，于是$P$具有形式

$$P=\underset{\quad 2\nu \qquad 1}{\begin{bmatrix} Q & 0\end{bmatrix}}.$$

因为$P$是$(m,2s,s,0)$型子空间，我们可以假定

$$PS\,{}^tP=M(m,2s,s).$$

所以

$$QK\,{}^tQ=M(m,2s,s).$$

也就是说，$Q$是$\mathbb{F}_q$上$2\nu$维辛空间$F_q^{(2\nu)}$中的$(m,s)$型子空间. 我们规定一个映射

$$\phi:\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+1)\longrightarrow \mathscr{M}(m,s;2\nu),$$
$$P=[Q\quad 0]\longmapsto Q.$$

显然，$\phi$是一个双射. 因为$\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+1)$和$\mathscr{M}(m,s;2\nu)$分别是$\mathscr{L}(m,2s;s,0;2\nu+1)$和$\mathscr{L}(m,s,2\nu)$的原子集，所以由$\phi$可以导出双射

$$\bar{\phi}:\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)\longrightarrow \mathscr{L}(m,s;2\nu),$$
$$\bigcap_i P_i\longmapsto \bigcap_i \phi(P_i),$$

并且$\bar{\phi}$保持格$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)$和格$\mathscr{L}(m,s;2\nu)$的偏序关系. 因此$\bar{\phi}$是一个格同构. □

**定理7.4** 设$n=2\nu+1$，并且$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\cong \mathscr{L}(m-1,s;2\nu).$$

**证明** 因为$\delta=1$和$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$，所以$(m,2s+1,s,1)$

满足(7.1)和(7.2). 因而 $\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\neq\phi$. 对于任意 $P\in\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$，由 $e_{2\nu+1}\in P$，可以假定 $P$ 具有形式

$$P=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}m-1\\ 1\end{matrix}.\quad (\text{列: } 2\nu,\ 1)$$

并且

$$PS_1{}^tP=\begin{bmatrix}M(m-1,2s,s) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因而

$$QK{}^tQ=M(m-1,2s,s).$$

也即，$Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 的 $(m-1,s)$ 型子空间. 我们规定一个映射

$$\phi:\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\longrightarrow\mathscr{M}(m-1,s;2\nu),$$

$$P=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\longmapsto Q.$$

显然，$\phi$ 是一个双射，如同定理3的证明，由 $\phi$ 可导出格同格

$$\bar{\phi}:\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\longrightarrow\mathscr{L}(m-1,s;2\nu+1),$$

$$\bigcap_i P_i\longmapsto\bigcap_i\phi(P_i).$$

□

**定理7.5** 设 $n=2\nu+2$，并且 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1$，那么 $m\neq n$，并且

$$\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)\cong\mathscr{L}(m-1,s;2\nu).$$

**证明** 由 $\delta=2$ 和 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1$，有 $m\neq n$，而 $(m,2s,s,1)$ 满足(7.1)和(7.2)，所以 $\mathscr{M}(m,2s,s,1;2\nu+2)\neq\phi$. 对于任意 $P\in\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)$，$P$ 的所有向量的最后一个分量是零. 因为 $e_{2\nu+1}\in P$，所以可假定 $P$ 具有如下形式的矩阵表示

$$P=\begin{bmatrix}Q & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}m-1\\ 1\end{matrix},\quad (\text{列: } 2\nu,\ 1,\ 1)$$

其中 $Q$ 是秩为 $m-1$ 的 $(m-1)\times2\nu$ 矩阵，使得 $QK{}^tQ=M(m-1,$

$2s,s)$. 因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间中的 $(m-1,s)$ 型子空间. 我们规定一个映射

$$\phi: \mathscr{M}(m,2s,s,1;2\nu+2) \longrightarrow \mathscr{M}(m-1,s;2\nu),$$
$$P = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto Q.$$

显然，$\phi$ 是一个双射，如同定理7.3的证明，由 $\phi$ 可导出格同构

$$\bar{\phi}: \mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2) \longrightarrow \mathscr{L}(m-1,s;2\nu),$$
$$\bigcap_i P_i \longmapsto \bigcap_i \phi(P_i). \qquad \square$$

## §7.3 若干引理（$\delta=1$ 的情形）

**引理7.6** 设 $n=2\nu+1>m\geqslant 1, \tau=0,1$, 或 $2$, 并且

$$2s+\tau \leqslant m \leqslant \nu+s+[\tau/2]. \tag{7.3}$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,S,0;2\nu+1) \supset \mathscr{L}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1). \tag{7.4}$$

**证明** 我们分 $\tau=0$ 和 $\tau>0$ 两种情形.

(a) $\tau=0$. 由定理7.3有格同构

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu) \longrightarrow \mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1), \tag{7.5}$$
$$Q \longmapsto [Q \quad 0],$$

其中0表示 $m\times 1$ 零矩阵. 根据引理3.2，我们有

$$\mathscr{L}(m,s;2\nu) \supset \mathscr{L}(m-1,s;2\nu). \tag{7.6}$$

再由定理7.3有格同构

$$\mathscr{L}(m-1,s;2\nu) \longrightarrow \mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+1), \tag{7.7}$$
$$Q_1 \longmapsto [Q_1 \quad 0]$$

其中0表示 $(m-1)\times 1$ 零矩阵. 从(7.5), (7.6)和(7.7), 得到 $\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1) \supset \mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+1)$.

(b) $\tau\geqslant 1$. 只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1).$$

如果$2s+\tau>m-1$，那么

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1)=\phi.$$

因而

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1).$$

现在假设$2s+\tau\leqslant m-1$，那么

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1)\neq\phi.$$

对于任意

$$P\in\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,0;2\nu+1),$$

可以假定

$$PS_1{}^tP=M(m-1,2s+\tau,s).$$

根据文献［28］定理4.11的证明，还可以进一步假定$P$具有形式

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}2s+[\tau/2]\\ 1\\ m-2-2s-[\tau/2]\end{matrix},$$
$$\qquad\begin{matrix}2\nu & 1\end{matrix}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix}P_1\\ v\\ P_2\end{bmatrix}$$

是秩为$m-1$的$(m-1)\times 2\nu$矩阵，并且

$$QK{}^tQ=\begin{cases}\begin{bmatrix}K_s & \\ & 0^{(m-2s-1)}\end{bmatrix}, & \text{如果 }\tau=1,\\[2ex] \begin{bmatrix}K_s & & \\ & K_1 & \\ & & 0^{(m-2s-3)}\end{bmatrix}, & \text{如果 }\tau=2,\end{cases}$$

而这里的$K_s=M(2s,2s,s)$和$K_1=M(2,2,1)$. 因而$Q$是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的$(m-1,s+[\tau/2])$型子空间. 从(7.3)得到$2(s+[\tau/2])$

$\leqslant m\leqslant \nu+(s+[\tau/2])$. 根据引理3.2的证明，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在两个不同的非零向量$v_1$和$v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的一对$(m,s+[\tau/2])$型子空间，并且它们的交是$Q$. 所以

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ v_2 & 0 \end{bmatrix}$$

是$2\nu+1$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的$(m,2s+\tau,s,0)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1)$. □

**引理7.7** 设$n=2\nu+1>m\geqslant 1, s\geqslant 1$，并且$(m,2s+\tau,s,0)$满足(7.3)，其中$\tau=0$，1，或2. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau,s-1,0;2\nu+1).$$

**证明** 我们分$\tau=0$和$\tau>0$两种情形.

(a)$\tau=0$. 采用引理7.6情形(a)中的方法，可以同样地来处理这种情形，得到

$$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau,s-1,0;2\nu+1).$$

(b)$\tau\geqslant 1$. 从(7.3)直接得到

$$2(s-1)+\tau\leqslant m-1\leqslant \nu+s-1+[\tau/2].$$

所以

$$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\tau,s-1,0;2\nu+1)\neq\phi.$$

对于任意$P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\tau,s-1,0;2\nu+1)$，可以假定

$$PS_l{}^tP=M(m-1,2(s-1)+\tau,s-1).$$

因为$e_{2\nu+1}\notin P$，所以又可假定$P$具有形式

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2(s-1)+[\tau/2] \\ 1 \\ m-2s-[\tau/2] \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} \quad 2\nu & 1 \end{matrix}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix} P_1 \\ v \\ P_2 \end{bmatrix}$$

是秩为 $m-1$ 的 $(m-1)\times 2\nu$ 矩阵，并且

$$QK\,{}^tQ=\begin{cases} \begin{bmatrix} K_{s-1} & \\ & 0^{(m-2s+1)} \end{bmatrix}, & \text{如果 } \tau=1, \\ \begin{bmatrix} K_{s-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0^{(m-2s-1)} \end{bmatrix}, & \text{如果 } \tau=2, \end{cases}$$

其中 $K_{s-1}=M(2(s-1),2(s-1),s-1)$. 所以 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-1,s-1+[\tau/2])$ 型子空间. 从(7.3)得到 $2(s+[\tau/2])\leqslant m\leqslant \nu+(s+[\tau/2])$，因而可以应用引理3.3和它的证明，于是存在 $(m-2(s+[\tau/2]+1)\times 2\nu$ 矩阵 $X$ 和 $2(\nu+s-m+[\tau/2])\times 2\nu$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ X \\ Y \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix}Q\\X\\Y\end{bmatrix}K\,{}^t\begin{bmatrix}Q\\X\\Y\end{bmatrix}=\begin{cases}\begin{bmatrix}K_{s-1}&&\\&K_{m-2s-1}&\\&&K_{\nu-s-m}\end{bmatrix}, & \text{如果 } \tau=1,\\ \begin{bmatrix}K_{s-1}&&&\\&K_1&&\\&&K_{m-2s-1}&\\&&&K_{\nu+s-m+1}\end{bmatrix}, & \text{如果 } \tau=2.\end{cases}$$

我们分 $\tau=1$ 和 $\tau=2$ 两种情形.

(b.1) $\tau=1$. 这时(7.3)变成 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s$. 于是 $m-2s+1\geqslant 2$. 设 $x_1$ 和 $x_2$ 分别是 $X$ 的第一行和第二行，那么

$$\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\\ x_2 & 0\end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\\ x_1+x_2 & 0\end{bmatrix}$$

是 $2\nu+1$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中的 $(m,2s+1,s,0)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)$.

(b.2) $\tau=2$. 这时(7.3)变成 $2s+2\leqslant m\leqslant \nu+s+1$. 所以 $m-2s-1\geqslant 1$. 设 $x_1$ 是 $X$ 的第一行，那么

$$\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\\ x_1 & 0\end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\\ x_1 & 1\end{bmatrix}$$

是 $2\nu+1$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中的 $(m,2s+2,s,0)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+1)$. □

**引理7.8** 设 $n=2\nu+1>m\geqslant 1$. 并且 $(m,2s+\tau,s,0)$ 满足(7.3)，其中 $\tau=1$ 或 2. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2s+(\tau-1),s,0;2\nu+1).$$

**证明** 从(7.3)得到$2s+(\tau-1)\leqslant m-1\leqslant \nu+s$. 所以$\mathscr{M}(m-1,2s+(\tau-1),s,0;2\nu+1)\neq\phi$. 对于任意$P\in\mathscr{M}(m-1,2s+(\tau-1),s,0;2\nu+1)$,可以假定$PS_1{}^tP=M(m-1,2s+(\tau-1),s)$. 因而$P$必具有形式

$$P=\begin{cases}\underset{2\nu\quad\ 1}{(Q\quad 0)}\ m-1, & \text{如果 } \tau=1,\\ \underset{2\nu\quad 1}{\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\end{bmatrix}_m}\begin{matrix}2s\\1\\2-2s\end{matrix}, & \text{如果 } \tau=2.\end{cases}$$

当$\tau=2$时，令

$$Q=\begin{bmatrix}P_1\\ v\\ P_2\end{bmatrix}.$$

那么在$\tau=1$和$\tau=2$的两种情形下，均有$QK{}^tQ=M(m-1,2s,s)$. 于是$Q$是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的$(m-1,s)$型子空间. 从(7.3)得到$2(s+[\tau/2])\leqslant m\leqslant\nu+(s+[\tau/2])$，因而可以应用引理3.2和它的证明. 我们分$\tau=1$和$\tau=2$两种情形.

(a) $\tau=1$. 由引理3.2的证明，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在两个非零向量$v_1$和$v_2$，使得

$$\begin{bmatrix}Q\\ v_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}Q\\ v_2\end{bmatrix}$$

是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的一对$(m,s)$型子空间. 并且它们的交是$Q$. 因而

$$\begin{bmatrix}Q & 0\\ v_1 & 1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}Q & 0\\ v_2 & 1\end{bmatrix}$$

是$2\nu+1$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的一对$(m,2s+1,s,0)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)$.

(b) $\tau=2$. 由引理3.2的证明，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在$(m-2s-1)\times 2\nu$矩阵$X$和$2(\nu-s-m+1)\times 2\nu$矩阵$Y$，使得(7.8)是非奇异的，并

且

$$\begin{bmatrix} Q \\ X \\ Y \end{bmatrix} K \,{}^t\!\begin{bmatrix} Q \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s & & \\ & K_{m-2s-1} & \\ & & K_{\nu+s-m+1} \end{bmatrix}.$$

根据(7.3)，有 $m-2s-1\geqslant 1$. 令 $x_1$是 $X$ 的第一行. 那么

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

是$2\nu+1$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的$(m,2s+2,s,0)$型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+1)$. □

**引理7.9** 设 $n=2\nu+1>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+2,s,0)$满足

$$2s+2\leqslant m\leqslant \nu+s+1, \tag{7.9}$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2s,s;2\nu+1).$$

**证明** 由(7.9)可知$2s\leqslant m-1\leqslant \nu+s$. 所以 $\mathscr{M}(m-1,2s,s,0;2\nu+1)\neq\phi$. 对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s,s,0;2\nu+1)$，可以假定 $PS_1{}^tP=M(m-1,2s,s)$. 所以 $P$ 必具有形式

$$P=\underset{\quad 2\nu \quad\;\; 1}{\begin{bmatrix} Q & 0 \end{bmatrix}}\, m-1,$$

其中 $QK{}^tQ=M(m-1,2s,s)$. 根据引理3.3的证明，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在两个不同的向量 $v_1$和 $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是$2\nu$ 维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的一对$(m,s+1)$型子空间，并且它们的交是 $Q$. 因而

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ v_1 & 1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ v_2 & 1 \end{bmatrix}$$

是$2\nu+1$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的一对$(m,2s+2,s,0)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+1)$. □

**引理7.10** 设$n=2\nu+1>m\geqslant 1$，$s\geqslant 1$，并且假定$(m,2s+1,s,0)$满足

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s.$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1).$$

**证明** 从$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s$，得到$2(s-1)+2\leqslant m-1\leqslant\nu+(s-1)+1$. 所以$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1)\neq\phi$. 对于任意$P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1)$，由文献[28]定理4.11的证明，可以假定$PS_1{}^tP=M(m-1,2(s-1)+2,s-1)$，并且

$$P=\begin{matrix}\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ v & 1\\ P_2 & 0\end{bmatrix} & \begin{matrix}2s-1\\ 1\\ m-2s-1\end{matrix}\\ \begin{matrix}2\nu & \quad 1\end{matrix} & \end{matrix}.$$

其中

$$\begin{bmatrix}P_1\\ v\\ P_2\end{bmatrix}$$

是秩为$m-1$的$(m-1)\times 2\nu$矩阵，使得

$$QK{}^tQ=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-1)} & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0^{(m-2s-1)}\end{bmatrix}.$$

于是$Q$是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的$(m-1,s)$型子空间. 根据引理3.2的证明，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在两个不同的非零向量$v_1$和$v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中的一对$(m,s)$型子空间，并且它们的交是$Q$. 因而

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ v_1 & 1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ v & 1 \\ P_2 & 0 \\ v_2 & 1 \end{bmatrix}$$

是$2\nu+1$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的一对$(m,2s+1,s,0)$型子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+2)$. □

## §7.4 格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+1)$

我们先讨论格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+1)$之间的包含关系.

**定理7.11** 设$n=2\nu+1$，$m\neq n$，并且

$$(\tau,\varepsilon),(\tau_1,\varepsilon_1)=(0,0),(1,0),(1,1)\text{ 或}(2,0).$$

假定$(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$满足

$$2s+\max\{\tau,\varepsilon\}\leqslant m\leqslant\nu+s+[\tau/2]+\varepsilon. \qquad (7.10)$$

那么

(a) 当$\varepsilon=1$而$\varepsilon_1=0$，或者$\varepsilon=0$而$\varepsilon_1=1$时，我们有

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+1)\cap\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;2\nu+1)=\{\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}\}.$$

(b) 当$\varepsilon=\varepsilon_1=1$，而$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$满足(7.10)，即$2s_1+1\leqslant m_1\leqslant\nu+s_1+1$成立时，

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,2\nu+1)$$

的充分必要条件是

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0. \qquad (7.11)$$

(c) 当$\varepsilon=\varepsilon_1=0$，$\tau=0$，而$\tau_1=1$或2时，我们有

$$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)\not\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1).$$

除非 $\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)=\phi$.

(d) 当 $\epsilon=\epsilon_1=0$，而 $\tau\neq 0$ 或 $\tau=\tau_1=0$，并且 $(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0)$ 满足(7.10)，即 $2s_1+\tau_1\leqslant m_1\leqslant \nu+s_1+[\tau_1/2]$ 成立时，

$$\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)\supset \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+1). \tag{7.12}$$

的充分必要条件是

$$m-m_1\geqslant s-s_1+\lceil(\tau-\tau_1)/2\rceil\geqslant\lceil|\tau-\tau_1|/2\rceil. \tag{7.13}$$

其中 $\lceil x\rceil$ 是不能比 $x$ 小的最小整数.

**证明** (a)和(c)是显然的.(b)可以从定理7.4和定理3.4得到.剩下的工作只需证明(d).

先证明充分性.我们分 $\tau-\tau_1=0$, $\tau-\tau_1\geqslant 1$ 和 $\tau-\tau_1=-1$ 三种情形.

(i) $\tau-\tau_1=0$. 这时(7.13)变成(7.11)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0.$$

平行于定理3.4充分性的证明,可以证得(7.12)成立，这里略去其详细证明过程.

(ii) $\tau-\tau_1\geqslant 1$. 这时(7.13)变成

$$m-m_1\geqslant s-s_1+1\geqslant 1.$$

令 $s-s_1=t$ 和 $m-m_1=t+t'$，其中 $t\geqslant 0$ 和 $t'\geqslant 1$. 因为 $(m, 2s+\tau, s, 0)$ 满足(7.10)，所以对于 $1\leqslant i\leqslant t$, $(m-i, 2(s-i)+\tau, s-i, 0)$ 也满足(7.10). 于是引理7.7可以连续地运用，因而得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1, 2(s-1)+\tau, s-1, 0; 2\nu+1)\\&\quad\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m-t, 2(s-t)+\tau, s-t, 0; 2\nu+1)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1+t', 2s_1+\tau, s_1, 0; 2\nu+1).\end{aligned} \tag{7.14}$$

当 $\tau-\tau_1=1$ 时应用引理7.8,而在 $\tau-\tau_1=2$ 时,应用引理7.9,而后得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t', 2s_1+\tau, s_1, 0; 2\nu+1)\\&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+1).\end{aligned} \tag{7.15}$$

因为$(m_1+t',2s_1+\tau,s_1,0)$满足(7.10)，所以$(m_1+t'-1,2s_1+\tau_1,s_1,0)$也满足(7.10). 由$(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0)$满足(7.10)，可知$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)\neq\phi$. 对于满足$1\leqslant i\leqslant t'-1$的整数$i$，$(m_1+t'-1-i,2s_1+\tau_1,s_1,0)$满足(7.10). 通过连续地应用引理7.6，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)\\&\quad\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1).\end{aligned}\tag{7.16}$$

从(7.14)，(7.15)和(7.16)得到(7.12).

(iii) $\tau-\tau_1=-1$. 这时$\tau=1,\tau_1=2$，并且(7.13)变成

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 1.$$

令$s-s_1=t$和$m-m_1=t+t'$，其中$t\geqslant 1$和$t'\geqslant 0$. 同上述的情形一样，通过连续地应用引理7.7，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'+1,2(s_1+1)+1,s_1+1,0;2\nu+1).\end{aligned}\tag{7.17}$$

因为$(m_1+t'+1,2(s_1+1)+1,s_1+1,0)$满足(7.10)，所以通过应用引理7.10，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t'+1,2(s_1+1)+1,s_1+1,0;2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+2,s_1,0;2\nu+1).\end{aligned}\tag{7.18}$$

由$(m_1+t',2s_1-2,s_1,0)$也满足(7.10)，有$\mathscr{M}(m_1,2s_1+2,s_1,0;2\nu+1)\neq\phi$，并且对于$1\leqslant i\leqslant t'$，$(m_1+t'-i,2s_1+2,s_1,0)$满足(7.10). 由引理7.6，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+2,s_1,0;2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+2,s_1,0;2\nu+1).\end{aligned}\tag{7.19}$$

从(7.17)，(7.18)和(7.19)又得到(7.12).

下面证明必要性. 当$\tau=\tau_1=0$时，(7.13)变成(7.11)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0.$$

由定理7.4和定理3.4的必要性，可知(7.13)成立. 现在讨论$\tau=1$，2的情形. 由$(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0)$满足(7.10)，可知$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)\neq\phi$. 设

$$Q \in \mathscr{M}(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)$$
$$\subset \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)$$
$$\subset \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1),$$

那么存在$(m, 2s+\tau, s, 0)$型子空间$P$，使得$P \supset Q$. 根据文献[28]定理4.24(ii)，存在$\varepsilon_1 = 0$或1使得

$$(\tau_1, \varepsilon_1) = \begin{cases} (0,0),(1,0),(1,1) \text{ 或}(2,0), & \text{如果 } \tau = 1, \\ (0,0),(0,1),(1,0),(2,0) \text{ 或}(2,1) & \text{如果 } \tau = 2 \end{cases} \tag{7.20}$$

和

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - [(\tau_1 + \tau - 1)/2] - \varepsilon_1\}$$
$$\leqslant \min\{m - 2s - \tau, m_1 - 2s_1 - \max\{\tau_1, \varepsilon_1\}\}. \tag{7.21}$$

我们分$\tau=1$和$\tau=2$两种情形.

(a) $\tau=1$. 再分$\tau_1=0,1$和2三种情形.

(a.1) $\tau_1=0$. 由(7.20)有$\varepsilon_1=0$. 这时(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1\} \leqslant \min\{m - 2s - 1, m_1 - 2s_1\}.$$

从$m_1-s-s_1 \leqslant m-2s-1$得到$m-m_1 \geqslant s-s_1+1$. 从$m_1-s-s_1 \leqslant m_1-2s_1$得到$s-s_1 \geqslant 0$. 因而有

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 + 1 \geqslant 1.$$

所以 (7.13) 成立.

(a.2) $\tau_1=1$. 由 (7.20) 有$\varepsilon_1=0$或1，如果$\varepsilon_1=0$，那么(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1\} \leqslant \min\{m - 2s - 1, m_1 - 2s_1 - 1\}.$$

从$m_1-s-s_1 \leqslant m-2s-1$得到$m-m_1 \geqslant s-s_1+1$. 从$m_1-s-s_1 \leqslant m_1-2s_1-1$得到$s-s_1 \geqslant 1$. 如果$\varepsilon_1=1$，那么(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - 1\} \leqslant \min\{m - 2s - 1, m_1 - 2s_1 - 1\}.$$

从$m-s-s_1-1 \leqslant m-2s-1$得到$m-m_1 \geqslant s-s_1$，从$m_1-s-s_1-1 \leqslant m_1-2s_1-1$得到$s-s_1 \geqslant 0$. 因此在$\varepsilon_1=0$和$\varepsilon_1=1$的情形下，有

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 0.$$

于是(7.13)也成立.

(a.3) $\tau_1=2$. 由(7.20)有$\varepsilon_1=0$. 这时(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - 1\} \leqslant \min\{m - 2s - 1, m_1 - 2s_1 - 2\}.$$

由此可得

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 1.$$

因此(7.13)也成立.

(b) $\tau=2$. 再分 $\tau_1=0$，1和2三种情形.

(b.1) $\tau_1=0$. 由(7.20)有 $\epsilon_1=0$或1. 这时(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - \epsilon_1\}$$
$$\leqslant \min\{m - 2s - 2, m_1 - 2s_1 - \epsilon_1\}.$$

因而有

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 + 1 \geqslant 1.$$

所以(7.13)也成立.

(b.2) $\tau_1=1$. 由(7.20)有 $\epsilon_1=0$. 这时(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - 1\}$$
$$\leqslant \min\{m - 2s - 2, m_1 - 2s_1 - 1\}.$$

因此得

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 + 1 \geqslant 1.$$

所以(7.13)也成立.

(b.3) $\tau_1=2$. 由(7.20)有 $\epsilon_1=0$或1. 这时(7.21)变成

$$\max\{0, m_1 - s - s_1 - 1 - \epsilon_1\}$$
$$\leqslant \min\{m - 2s - 2, m_1 - 2s_1 - 2\}.$$

因此可得

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 0.$$

因此(7.13)又成立. □

下面给出$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的子空间在$\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, \epsilon; 2\nu+1)$中的条件.

**定理7.12** 设 $n=2\nu+1$, $m\neq n$. 并且

$$(\tau, \epsilon) = (0,0), (1,0), (1,1), \text{或} (2,0).$$

假定$(m, 2s+\tau, s, \epsilon)$满足(7.10)

$$2s + \max\{\tau, \epsilon\} \leqslant m \leqslant \nu + s + [\tau/2] + \epsilon.$$

(a) 如果$(\tau, \epsilon)=(0,0)$, 那么$\mathscr{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$和

满足(7.11)

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 0$$

的所有$(m_1, 2s_1, s_1, 0)$型子空间组成.

(b) 如果$(\tau,\varepsilon)=(1,1)$，那么$\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$和满足(7.11)

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 \geqslant 0$$

的所有$(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 1)$型子空间组成.

(c) 如果$(\tau,\varepsilon)=(1,0)$或$(2,0)$，那么$\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$和满足(7.13)

$$m - m_1 \geqslant s - s_1 + \lceil(\tau - \tau_1)/2\rceil \geqslant \lceil|\tau - \tau_1|/2\rceil$$

的所有$(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0)$型子空间组成.

**证明** (a)和(b)分别由定理7.3和定理7.4以及定理3.5得到.

(c) 我们已约定$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)} \in \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)$. 设$Q$是满足(7.13)的$(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0)$型子空间，那么

$$\begin{aligned} Q &\in \mathscr{M}(m_1,\ 2s_1+\tau_1,\ s_1,\ 0;\ 2\nu+1) \\ &\subseteq \mathscr{L}(m_1,\ 2s_1+\tau_1,\ s_1,\ 0;\ 2\nu+1) \\ &\subseteq \mathscr{L}(m,\ 2s+\tau,\ s,\ 0;\ 2\nu+1), \end{aligned}$$

其中后一个包含关系由定理7.11得到.

反之，假设$Q \in \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)$，其中$\tau=1$或2，而$Q \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$，并且$Q$是$(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0)$型子空间，那么存在一个$(m, 2s+\tau, s, 0)$型子空间$P$，使得$P \supseteq Q$. 按照定理7.11必要性的证明，对于$\tau=1$，2的过程进行，可知(7.13)成立. □

**推论7.13** 设$n=2\nu+1$，$m \neq n$，并且

$$(\tau,\varepsilon) = (0,0), (1,0), (1,1), \text{或} (2,0).$$

假定$(m, 2s+\tau, s, \varepsilon)$满足(7.10). 那么

$$\{0\} \in \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1),$$

$$\{0\} \notin \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1).$$

但是

$$\langle e_{2\nu+1}\rangle \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{x\in\mathscr{M}_4^{(1,0)}} X$和$\langle e_{2\nu+1}\rangle=\bigcap_{x\in\mathscr{M}_4^{(1,1)}} X$分别是$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1)$和$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$的最大元. □

从定理7.12的证明可得

**推论7.14** 设$n=2\nu+1$，$m\neq n$，并且$(\tau,\epsilon)=(0,0),(1,0),(1,1)$,或$(2,0)$. 假定$(m,2s+\tau,s,0)$满足(7.10). 如果$P$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中包含在$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+1)$中的子空间，而$Q$是$P$的真子空间，那么$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau,\epsilon,0;2\nu+1)$. □

在这一节的最后，给出几何格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+1)$的特征多项式. 设$n=2\nu+\delta$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\tau,s,\epsilon)$满足(7.2). 对于(7.1)中的任一数对$(\tau,\epsilon)$，规定

$$N(m,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+\delta)=|\mathscr{M}(m,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+\delta)|,$$

其准确表示式已由文献［28］定理4.14给出. 我们仍用$g_{m_1}(t)=(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{m_1-1})$表示次数为$m_1$的Gauss多项式. 于是有

**定理7.15** 设$n=2\nu+1$，$m\neq n$，并且

$$(\tau,\epsilon)=(0,0),(1,0),(1,1),\text{或}(2,0).$$

假定$(m,2s+\tau,s,\epsilon)$满足(7.10)

$$2s+\max\{\tau,\epsilon\}\leqslant m\leqslant\nu+s+[\tau/2]+\epsilon.$$

那么

(a) $\chi(\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1),t)=\chi(\mathscr{L}(m,s;2\nu),t)$

$$=\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{\nu+s_1}\right]N(m_1,s_1;2\nu)g_{m_1}(t).$$

(b) $\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1),t)$

$$=\sum_{\tau_1=0,1,\text{或}2}\left[\sum_{s_1=s-\tau_2+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{\nu+s_1+[\tau_1/2]}+\sum_{s_1=0}^{s-\tau_2}\sum_{m_1=m-s+s_1-\lceil(1-\tau_1)/2\rceil+1}^{\nu+s_1+[\tau_1/2]}\right]$$

$$N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+1}^{\nu+s_1+1}N(m_1,2s_1+1,s_1,1;2\nu+1)g_{m_1}(t),$$

其中$\tau_2=\lceil|1-\tau_1|/2\rceil-\lceil(1-\tau_1)/2\rceil$.

(c) $\chi(\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+1),t)$

$$=\sum_{\tau_1=0,1,\text{或}2}\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{\nu+s_1+[\tau_1/2]}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1-\lceil(2-\tau_1)/2\rceil+1}^{\nu+s_1+[\tau_1/2]}\right]$$

$$N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+1)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+1}^{\nu+s_1+1}N(m_1,2s_1+1,s_1,1;2\nu+1)g_{m_1}(t).$$

(d) $\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),t)=\chi(\mathscr{L}(m-1,s;2\nu),t)$

$$=\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1}^{\nu+s_1}\right]N(m_1,s_1;2\nu)g_{m_1}(t).$$

**证明** (a)和(d)分别从定理7.3与定理3.11和定理7.4与定理3.11得到. 对于(b)和(c)可按照定理3.11证明中所给的方法,同样地进行证明. □

## §7.5 若干引理($\delta=2$的情形)

**引理7.16** 设$n=2\nu+2>m\geqslant 1$, 并且$(\tau,\epsilon)=(0,0),(0,1),(1,0),(2,0)$,或$(2,1)$. 假定$(m,2s+\tau,s,\epsilon)$满足

$$2s+\max\{\tau,\epsilon\}\leqslant m\leqslant \nu+s+[(\tau+1)/2]+\epsilon, \quad (7.22)$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m-1,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2).$$

**证明** 在$(\tau,\epsilon)=(0,1)$的情形,可按照引理7.6证明中$\tau=0$的情形, 利用定理7.5和引理3.2证得.

现在考虑其余的四种情形. 我们只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2). \quad (7.23)$$

如果$2s+\tau>m-1$, 那么$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2)=\phi$, 因而(7.23)成立. 下面假定$2s+\tau\leqslant m-1$. 这时$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2)\neq\phi$. 令$P\in\mathscr{M}(m-1,2s+\tau,s,\epsilon;2\nu+2)$, 我们分$\tau=0$和$\tau\geqslant 1$两种情形.

(a) $\tau=0$. 这时 $\epsilon=0$ 和 $P$ 是 $(m-1,2s,s,0)$ 型子空间. 不妨设

$$PS_2{}^tP = M(m-1,2s,s), \tag{7.24}$$

那么 $P$ 必具有形式

$$P=\underset{\quad 2\nu \qquad 1 \quad 1}{[P_1 \quad {}^tu \quad 0]},$$

其中 $P_1$ 是 $(m-1)\times 2\nu$ 矩阵, 而 $u$ 是 $1\times(m-1)$ 矩阵. 从(7.24)得到

$$P_1K{}^tP_1 = M(m-1,2s,s).$$

因为现在考虑的是 $(\tau,\epsilon)=(0,0)$ 的情形, 所以 $e_{2\nu+1}\notin P$. 因而 $\mathrm{rank}P_1=m-1$. 于是 $P_1$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-1,s)$ 型子空间. 从(7.22)得到 $2s\leqslant m\leqslant \nu+s$. 根据引理3.2的证明. 在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$ 和 $v_2$, 使得

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的一对 $(m,2s,s,0)$ 型子空间, 并且它们的交是 $P_1$. 因此

$$\begin{bmatrix} P_1 & {}^tu & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_1 & {}^tu & 0 \\ v_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对 $(m,2s,s,0)$ 型子空间, 并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+2)$. 所以(7.23)成立.

(b) $\tau\geqslant 1$. 这时 $(\tau,\epsilon)=(1,0),(2,0)$, 或 $(2,1)$. 我们可以假定

$$PS_2{}^tP = M(m-1,2s+\tau,s).$$

(b.1) $(\tau,\epsilon)=(1,0)$. 由文献 [28] 定理4.11的证明, 存在 $T_1\in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$, 而 $T_1$ 具有形式

$$T_1 = \begin{bmatrix} I^{(2\nu)} & K{}^tx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.25}$$

使得 $PT_1$ 具有形式

$$PT_1=\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s \\ 1 \\ m-2s-2 \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} \quad 2\nu & 1 & 1 \end{matrix}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

的秩是 $m-2$，并且

$$QK\,{}^tQ=M(m-2,2s,s).$$

因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-2,s)$ 型子空间. 从(7.22)得到 $2s\leqslant m-1\leqslant \nu+s$. 由引理3.2的证明，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$ 和 $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-1,s)$ 型子空间，并且它们的交是 $Q$. 令

$$u_i=(v_i \quad 0 \quad 0)T_1^{-1}, \quad i=1,2. \tag{7.26}$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ u_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ u_2 \end{bmatrix}$$

都是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的 $(m,2s+1,s,0)$ 型子空间. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2)$.

(b.2) $(\tau,\epsilon)=(2,0)$. 由文献[28]定理4.11的证明，存在 $T_1\in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$，而 $T_1$ 具有形式(7.25)，使得 $PT_1$ 具有形式

$$PT_1 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s \\ 1 \\ 1 \\ m-2s-3 \end{matrix},$$
$$\begin{matrix} 2\nu & 1 & 1 \end{matrix}$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ v \\ P_2 \end{bmatrix}$$

的秩是 $m-2$，并且

$$QK\,{}^tQ = M(m-2, 2s, s).$$

因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-2, s)$ 型子空间. 从(7.22)得到 $2s \leqslant m-1 \leqslant \nu+s$. 由引理3.2的证明，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$, $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的一对 $(m-1, s)$ 型子空间，并且它们的交是 $Q$. 按照前面(7.26)来定义 $u_i (i=1,2)$. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ u_1 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ u_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间中的一对 $(m, 2s+2, s, 0)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+2, s, 0; 2\nu+2)$.

(b.3) $(\tau, \varepsilon) = (2, 1)$. 由文献[28]定理4.11的证明，存在 $T_1 \in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$，而 $T_1$ 具有形式(7.25)，使得

$$PT_1 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s \\ 1 \\ 1 \\ m-2s-3 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 2\nu & 1 & 1 \end{matrix}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$$

的秩是 $m-3$，并且

$$QK\,{}^tQ=M(m-3,2s,s).$$

因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-3,s)$ 型子空间. 从(7.22)得到 $2s\leqslant m-2\leqslant \nu+s$. 根据引理3.2的证明，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$ 和 $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix}Q\\v_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}Q\\v_2\end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的一对 $(m-2,s)$ 型子空间，它们的交是 $Q$. 按照 $(\tau,\varepsilon)=(1,0)$ 的情形由(7.26)来定义 $u_i(i=1,2)$. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\u_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\u_2\end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对 $(m,2s+2,s,1)$ 型子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$. □

**引理7.17** 设 $n=2\nu+2>m\geqslant1$，$s\geqslant1$，并且 $(\tau,\varepsilon)=(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(2,0)$，或 $(2,1)$. 假定 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 满足(7.22)，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+2)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau,s-1,\varepsilon;2\nu+2).$$

**证明** 这个引理可按照引理16证明中所用的方法进行. 这里略去详细步骤. □

**引理7.18** 设 $n=2\nu+2>m\geqslant1$、$\tau=1$ 或 $2$. 假定 $(m,2s+\tau,s,0)$ 满足(7.22)，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+2)$$
$$\supset\mathscr{L}(m-1,2s+(\tau-1),s,0;2\nu+2).$$

**证明** 我们只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,2s+(\tau-1),s,0;2\nu+2)$$

$\subset \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+2)$.

设 $P \in \mathscr{M}(m-1, 2s+(\tau-1), s, 0; 2\nu+2)$. 不妨假定

$$PS_2{}^tP = M(m-1, 2s+(\tau-1), s).$$

我们分 $\tau=1$ 和 $\tau=2$ 两种情形.

(a) $\tau=1$. 这时 $P$ 是 $(m-1, 2s, s, 0)$ 型子空间. 因为 $l_{2\nu+1} \notin P$, 所以 $P$ 具有形式

$$P = \underset{\phantom{x}}{[}\underset{2\nu}{P_1} \quad \underset{1}{{}^tu} \quad \underset{1}{0}],$$

其中 $P_1$ 是秩为 $m-1$ 的 $(m-1)\times 2\nu$ 矩阵, 使得 $P_1K{}^tP_1 = M(m-1, 2s, s)$. 令

$$Q = [P_1 \quad 0 \quad 0].$$

显然, $Q$ 是 $(m-1, 2s, s, 0)$ 型子空间. 由文献 [28] 定理4.12的证明, 存在 $T_2 \in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$. 使得

$$PT_2 = Q.$$

令

$$v_1 = [\underset{2\nu}{0} \quad \underset{1}{0} \quad \underset{1}{1}] \text{ 和 } v_2 = [\underset{2\nu}{0} \quad \underset{1}{1} \quad \underset{1}{1}],$$

并且规定 $u_i = v_i T_2^{-1}$, 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ u_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ u_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对 $(m, 2s+1, s, 0)$ 型子空间, 并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+2)$.

(b) $\tau=2$. 由文献[28]定理4.11的证明, 存在 $T_1 \in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$, 而 $T_1$ 具有形式(7.25), 使得 $PT_1$ 具有形式

$$PT_1 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s \\ 1 \\ m-2s-2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \scriptstyle 2\nu & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 1 \end{matrix}$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

的秩是 $m-2$，并且

$$QK\,{}^tQ = M(m-2, 2s, s).$$

因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-2,s)$ 型子空间. 从(7.22)得到 $2s \leqslant m-1 \leqslant \nu+s$. 由引理3.2的证明，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$ 和 $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix} Q \\ v_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q \\ v_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间中的一对 $(m-1,s)$ 型子空间，并且它们的交是 $Q$. 令

$$u_i = (v_i \quad 1 \quad 0)T_1^{-1}, \qquad i = 1,2.$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ u_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ u_2 \end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对 $(m,2s+2,s,0)$ 型子空间，它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+2)$. □

**引理7.19** 设 $n=2\nu+2>m\geqslant 1$，并且 $\varepsilon=0$ 或 $1$. 假定 $(m,2s+2,s,\varepsilon)$ 满足(7.22). 那么

$$\mathscr{L}(m, 2s-2, s, \varepsilon; 2\nu+2) \supset \mathscr{L}(m-1, 2s, s, \varepsilon; 2\nu+2).$$

**证明** 设 $P \in \mathscr{M}(m-1,2s,s,\varepsilon;2\nu+2)$. 不妨假定

$$PS_2\,{}^tP = M(m-1, 2s, s).$$

我们分 $\varepsilon=0$ 和 $\varepsilon=1$ 两种情形.

(a) $\varepsilon=0$. 这时 $P$ 是 $(m-1,2s,s,0)$ 型子空间，而它具有形式

$$P = \begin{bmatrix} \underset{2\nu}{P_1} & \underset{1}{{}^tu} & \underset{1}{0} \end{bmatrix},$$

其中 $P_1$ 是秩为 $m-1$ 的 $(m-1)\times 2\nu$ 矩阵，使得

$$P_1K\,{}^tP_1 = M(m-1, 2s, s).$$

显然，

$$Q = [P_1 \quad {}^t e_{m-1} \quad 0]$$

也是$(m-1,2s,s,0)$型子空间. 由文献 [28] 定理4.12的证明，存在 $T_2 \in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$，使得

$$PT_2 = Q.$$

令

$$u_1 = (0^{(1,2\nu)} \quad 0 \quad 1)T_2^{-1} \text{ 和 } u_2 = (0^{(1,2\nu)} \quad 1 \quad 1)T_2^{-1}.$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ u_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ u_2 \end{bmatrix}$$

都是$2\nu+2$维伪辛空间中的$(m,2s+2,s,0)$型子空间，它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+2)$.

(b) $\varepsilon=1$. 这时 $P$ 是$(m-1,2s,s,1)$型子空间. 不妨设

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m-2 \\ 1 \end{matrix},$$
$$\qquad \begin{matrix} 2\nu & 1 & 1 \end{matrix}$$

其中 $P_1$是秩为 $m-2$的$(m-2)\times 2\nu$ 矩阵，使得

$$P_1 K {}^t P_1 = M(m-2,2s,s).$$

设 $v$ 是$\mathbb{F}_q^{(2\nu)} \backslash P_1$中任一个向量. 那么

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是$2\nu+2$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对$(m,2s+2,s,1)$型子空间，它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$. □

**引理7.20** 设 $n=2\nu+2>m\geqslant 1, s\geqslant 1$，并且假定$(m,2s+\tau,s,0)$满足

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s+1, \tag{7.27}$$

那么

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2) \\ &\qquad \supset \mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2). \end{aligned}$$

**证明** 设 $P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+2,s,0;2\nu+2)$. 不妨假定

$$PS_2{}^tP=M(m-1,2(s-1)+2,s-1).$$

根据文献［28］定理4.11的证明，存在 $T_1\in Ps_{2\nu+2}(\mathbb{F}_q)$，而 $T_1$ 具有形式(7.25)，使得 $PT_1$ 具有形式

$$PT_1=\begin{bmatrix}P_1 & 0 & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ P_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}2(s-1)\\ 1\\ 1\\ m-2s-1\end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix}2\nu & 1 & 1\end{matrix}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix}P_1\\ v\\ P_2\end{bmatrix}$$

的秩是 $m-2$，并且

$$QK{}^tQ=M(m-2,2(s-1),s-1).$$

因而 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-2,s-1)$ 型子空间. 从(7.27)得到 $2s\leqslant m-1\leqslant\nu+s$. 由引理3.3的证明，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在两个不同的非零向量 $v_1$ 和 $v_2$，使得

$$\begin{bmatrix}Q\\ v_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}Q\\ v_2\end{bmatrix}$$

是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的一对 $(m-1,s)$ 型子空间，它们的交是 $Q$. 令

$$u_i=(v_i\quad 0\quad 1)T_1^{-1},\quad i=1,2.$$

那么

$$\begin{bmatrix}P\\ u_1\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\ u_2\end{bmatrix}$$

是 $2\nu+2$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中的一对 $(m,2s+1,s,0)$ 型子空间，它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2)$. □

## §7.6 格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+2)$

显然，

$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+2)\cap\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu+2)$

$=\{\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}\}$.

我们自然地要对$\varepsilon=0$和$\varepsilon=1$分别进行讨论.

首先考虑$\varepsilon=0$的情形. 平行于定理11—15，我们有

**定理7.21** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，而$\varepsilon=\varepsilon_1=0$，并且$\tau=0$，1，或2. 假定$(m,2s+\tau,s,0)$满足

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\nu+s+[(\tau+1)/2].\qquad(7.28)$$

那么

(a) 对于$\tau=0$而$\tau_1=1$或2，我们有

$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+2)\not\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+2)$，

除非$\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+2)=\phi$.

(b) 对于$\tau\neq0$或$\tau=\tau_1=0$，而$(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0)$满足(7.28)

$$2s_1+\tau_1\leqslant m\leqslant\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2].$$

$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,0;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+2)$

的充分必要条件是(7.13)

$$m-m_1\geqslant s-s_1+\lceil(\tau-\tau_1)/2\rceil\geqslant\lceil|\tau-\tau_1|/2\rceil$$

成立.

**证明** (a)是显然的，而(b)可以同样地使用定理7.11(d)中的方法进行证明. □

**定理7.22** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，而$\varepsilon=0$，并且$\tau=0$，1，或2. 假定$(m,2s+\tau,s,0)$满足(7.28).

(a) 如果$(\tau,\varepsilon)=(0,0)$，那么$\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu-2)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$和满足(7.11)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant0$$

的所有$(m_1,2s_1,s_1,0)$型子空间组成.

(b) 如果$(\tau,\varepsilon)=(1,0),(2,0)$，那么$\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+2)$

由$\mathbb{P}_q^{(2\nu+2)}$和满足(7.13)

$$m-m_1 \geqslant s-s_1+[(\tau-\tau_1)/2] \geqslant [|\tau-\tau_1|/2]$$

的所有$(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0)$型子空间组成.

**证明** 类似于定理7.12(c)的证明. □

**推论7.23** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，$\varepsilon=0$，并且$\tau=0$，1，或2. 假定$(m, 2s+\tau, s, 0)$满足(7.28)，那么

$$\{0\} \in \mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+2),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_q^{(2\nu+2)}} X$是$\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+2)$的最大元.

**推论7.24** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，$\varepsilon=0$，并且$\tau=0$，1，或2. 假定$(m, 2s+\tau, s, 0)$满足(7.28). 如果$P$是$\mathbb{P}_q^{(2\nu+2)}$中包含在$\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+2)$中的真子空间，而$Q$是$P$的子空间，那么$Q\in\mathscr{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+2)$. □

下面仍规定$N(m, 2s+\tau, s, \varepsilon; 2\nu+2)=|\mathscr{M}(m, 2s+\tau, s, \varepsilon; 2\nu+2)|$，而$g_{m_1}(t)$是次数为$m_1$的Gauss多项式，我们又有

**定理7.25** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，而$(\tau, \varepsilon)=(0,0), (1,0)$，或$(2,0)$. 假定$(m, 2s+\tau, s, 0)$满足(7.28)

$$2s+\tau \leqslant m \leqslant \nu+s+[(\tau+1)/2].$$

那么

(a) $\chi(\mathscr{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu+2), t)$

$$=\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{\nu+s_1}\right] N(m_1, 2s_1, s_1, 0; 2\nu+2)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{\tau_1=1,2}\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]} N(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+2)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{\tau_1=0,2}\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\max\{\tau_1,1\}}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]+1} N(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 1; 2\nu+2)g_{m_1}(t).$$

(b) $\chi(\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+2), t)$

$$=\sum_{\tau_1=0,1,或2}\left[\sum_{s_1=s-\tau_2+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]}+\sum_{s_1=0}^{s-\tau_2}\sum_{m_1=m-s+s_1-[(1-\tau_1)/2]+1}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]}\right]$$

$$N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+2)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{\tau_1=0,2}\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=2s_1+\max\{\tau_1,1\}}^{\nu+s_1+[(\tau_1-1)/2]+1}N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,1;2\nu+2)g_{m_1}(t),$$

其中 $\tau_2=\lceil|1-\tau_1|/2\rceil-\lceil(1-\tau_1)/2\rceil$.

(c) $\chi(\mathscr{L}(m,2s+2,s,0;2\nu+2),t)$

$$=\sum_{\tau_1=0,1,\text{或}2}\left[\sum_{s_1=s+1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1-[(2-\tau_1)/2]+1}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]}\right]$$

$$N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+2)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{\tau_1=0,2}\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+\max\{\tau_1,1\}}^{\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]+1}N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,1;2\nu+2)g_{m_1}(t).$$

□

现在考虑 $\varepsilon=1$ 的情形. 我们有

**定理7.26** 设 $n=2\nu+2$, $m\neq n$, 并且 $\varepsilon=\varepsilon_1=1$. 假定 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 满足

$$2s+\max\{\tau,1\}\leqslant m\leqslant\nu+s+[(\tau+1)/2]+1, \tag{7.29}$$

而 $\tau=0$ 或 $2$, 那么

(a) 对于 $\tau=0$ 和 $\tau_1=2$, 我们有

$$\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)\not\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+2,s_1,1;2\nu+2),$$

除非 $\mathscr{M}(m_1,2s_1-2,s_1,1;2\nu+2)=\phi$.

(b) 对于 $\tau-\tau_1=0$ 或 $2$. 假定 $(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,1)$ 满足(7.29), 也即,

$$2s_1+\max\{\tau_1,1\}\leqslant m_1\leqslant\nu+s_1+[(\tau_1+1)/2]+1$$

成立时,

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu-2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,1;2\nu+2) \tag{7.30}$$

的充分必要条件是

$$m-m_1\geqslant s-s_1+(\tau-\tau_1)/2\geqslant(\tau-\tau_1)/2. \tag{7.31}$$

**证明** (a) 是显然的.

(b) 我们分 $\tau-\tau_1=0$ 和 $\tau-\tau_1=2$ 两种情形.

(b.1) $\tau-\tau_1=0$. 这里 $\tau_1=\tau$，而且(7.31)变成(7.11)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0.$$

使用证明定理3.4的方法，可证得定理7.26在 $\tau-\tau_1=0$时成立.

(b.2) $\tau-\tau_1=2$. 这时 $\tau=2$，$\tau_1=0$，并且(7.31)变成

$$m-m_1\geqslant s-s_1+1\geqslant 1.$$

先证充分性. 设 $s-s_1=t$ 和 $m-m_1=t+t'$，那么 $t\geqslant 0$和 $t'\geqslant 1$. 连续地应用引理7.17，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+2,s-t,1;2\nu+2)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+2,s_1,1;2\nu+2).\end{aligned}\tag{7.32}$$

再连续应用引理7.17，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+2,s,1;2\nu+2)\\&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+1,2s_1+2,s_1,1;2\nu+2).\end{aligned}\tag{7.33}$$

根据引理7.20，有

$$\mathscr{L}(m_1+1,2s_1+2,s_1,1;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1,s_1,1;2\nu+2).\tag{7.34}$$

从(7.32)，(7.33)和(7.34)得到(7.30).

对于必要性，可按照定理7.11(d)中必要性给出的方法进行证明，并且要用到文献［28］中的定理4.24(vi).

**定理7.27** 设 $n=2\nu+2$，$m\neq n$，并且$(\tau,\varepsilon)=(0,1)$或$(2,1)$. 假定$(m,2s+\tau,s,1)$满足(7.29)

$$2s+\max\{\tau,1\}\leqslant m\leqslant \nu+s+[(\tau+1)/2]+1.$$

那么

(a) $\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$和满足(7.11)

$$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0$$

的所有$(m_1,2s_1,s_1,1)$子空间组成.

(b) $\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$和满足(7.31)

$$m-m_1\geqslant s-s_1+(\tau-\tau_1)/2\geqslant(\tau-\tau_1)/2$$

的所有$(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,1)$型子空间组成.

**证明** (a)由定理7.5和定理3.5得到. 而(b)类似于定理7.12(c)的证明. □

**推论7.28** 设$n=2\nu+2$，$m\neq n$，并且$(\tau,\epsilon)=(0,1)$或$(2,1)$. 假定$(m,2s+\tau,s,1)$满足(7.29). 那么

$$\{0\}\notin\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu+2),$$

但是

$$\langle e_{2\nu+1}\rangle\in\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu+2),$$

并且

$$\langle e_{2\nu+1}\rangle=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_1^{(2,1)}}X\text{ 是 }\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu+2)\text{的最大元}$$ □

下面给出格$\mathscr{L}(m,2s+\tau,s,1;2\nu+2)$的特征多项式. 由定理7.5，$\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)$的特征多项式等于$2\nu$维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中格$\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$的特征多项式. 因而我们有

**定理7.29** 设$n=2\nu+2$，而$m\neq n$. 假定$(m,2s,s,1)$满足(7.29)

$$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1.$$

那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2),t)=\chi(\mathscr{L}(m-1,s;2\nu),t),$$

而$\chi(\mathscr{L}(m-1,s;2\nu),t)$已由定理3.11给出. □

然而，当$\tau=2$时，要给出格$\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$的特征多项式，需要引进另外一种格，这种格同构于$\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$，并且它的特征多项式又容易得到. 因而就能得到格$\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)$的特征多项式.

设$n=2\nu+1$. 并且

$$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{M}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\\\cup\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

我们用$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$表示$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)$中子空间交所成的集合. 在$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$中，按子空间的反包含关系来规定它的偏序. 再约定$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$是$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)$中子空间空集的交. 那么$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$是由$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)$**生成**

的格.

因为$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的每个$(m,2s+1,s,0)$型子空间不包含$e_{2\nu+1}$，而$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中的每个$(m,2s+1,s,1)$型子空间包含$e_{2\nu+1}$，所以$(m,2s+1,s,0)$型子空间和$(m,2s+1,s,1)$型子空间的交是空集. 因此

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\\ \bigcup \mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

和

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\bigcap \mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)\\ =\{\mathbb{F}_q^{(2\nu-1)}\}.$$

所以，由特征多项式的定义，有

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1),t)=\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1),t)\\ +\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1,t)-t^{2\nu+1}.$$

因为$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),t)$等于$\chi(\mathscr{L}(m-1,s;2\nu),t)$，这可由定理7.15(d)给出，而$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1),t)$已由定理7.15(b)给出. 因而可得到$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$的特征多项式的准确表示式.

**定理7.30** 设$n=2\nu+1$，并且假定

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1.$$

那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1),t)=\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)t)\\ +\chi(m,2s+1,s,1;2\nu+1),t)-t^{2\nu+1},$$

其中$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1),t)$和$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),t)$分别由定理7.15(b)和定理7.15(d)给出. □

此外，又有如下的同构定理.

**定理7.31** 设$n=2\nu+2$，并且假定

$$2s+2\leqslant m\leqslant \nu+s+2.$$

那么$\mathscr{L}(m, 2s+2, s, 1; 2\nu+2)\cong\mathscr{L}(m-1, 2s+1; 2\nu+1)$.

**证明** 由题设可知$\mathscr{M}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)\neq\phi$. 设$P$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$中的$(m,2s+2,s,1)$型子空间. 不妨假定

$$PS_2{}^tP=M(m,2s+2,s).$$

那么 $P$ 的行向量的第$2\nu+2$个分量，除了第$2s+2$个行向量是1外，其余的行向量是0. 因为 $e_{2\nu+1}\in P$，所以可假定 $P$ 具有形式

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\\ P_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}2s\\ 1\\ 1\\ m-2s-2\end{matrix}, \qquad (7.35)$$
$$\begin{matrix}\quad 2\nu & 1 & 1\end{matrix}$$

令

$$Q=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ x & 1\\ P_2 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}2s\\ 1\\ m-2s-2\end{matrix},$$
$$\begin{matrix}2\nu & 1\end{matrix} \qquad (7.36)$$

那么

$$QS_1{}^tQ=M(m-1,2s+1,s).$$

所以，根据 $x\neq 0$或 $x=0$，$Q$ 分别是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中的$(m-1,2s+1,s,0)$型或$(m-1,2s+1,s,1)$型子空间，也即，$Q\in\mathscr{M}(m-1,2s+1;2\nu+1)$. 定义一个映射

$$\phi:\mathscr{M}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)\longrightarrow\mathscr{M}(m-1,2s-1;2\nu+1)$$
$$P\longmapsto Q,$$

其中 $P$ 和 $Q$ 分别由(7.35)和(7.36)确定. 显然，$\phi$ 是一个双射，而且如同定理7.3 一样，可以导出一个格同构

$$\overline{\phi}:\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2)\longrightarrow\mathscr{L}(m-1,2s+1;2\nu+1)$$
$$\bigcap_i P_i\longmapsto\phi(P_i) \qquad \square$$

从定理7.30和7.31，我们得到

**定理7.32** 设 $n=2\nu+2$，并且假定

$$2s+2\leqslant m\leqslant\nu+s+2.$$

那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+2,s,1;2\nu+2),t)$$
$$=\chi(\mathscr{L}(m-1,2s+1;2\nu+2),t),$$

其准确表示式，可以由定理7.30中的 $m$ 换成 $m-1$得到. $\square$

## §7.7 注记

本章主要根据参考文献［17］编写，其中的所有引理，定理7.3—7.5，定理7.11的(a)，(b)，(c)以及(d)的充分性，定理7.12，定理7.15，定理7.21的(a)以及(b)的充分性，定理7.22，定理7.25，定理7.26的(a)以及(b)的充分性．定理7.27，定理7.29—7.32，推论7.13—7.14，推论7.23—7.24和推论7.28均取自该文．

本章的主要参考资料有：参考文献［17］和［28］．

# 第八章　有限奇特征正交几何中由相同维数和秩的子空间生成的格

## §8.1　奇特征正交群$O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$作用下由相同维数和秩的子空间生成的格

本章采用第五章的符号和术语，是以第五章的内容为基础进行讨论的.

设 $P$ 是$2\nu+\delta$ 维正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的 $m$ 维子空间，$P$ 的矩阵表示仍记作 $P$. 我们把矩阵 $PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP$ 的秩称为**子空间** $P$ **的秩**，记作 $2s+\tau$，其中 $\tau=0$或1. 显然，$m$ 维子空间 $P$ 的秩是正交群$O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)$作用下的不变量.

**定义8.1**　在$2\nu+\delta$ 维正交空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中，一个秩为$2s+\tau$ 的 $m$ 维子空间称为$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ **中关于** $S_{2\nu+\delta,\Delta}$**的**$(m,2s+\tau)$**子空间**.

如果非奇异对称矩阵$S_{2\nu+\delta,\Delta}$和正交空间能从上下文看出时，就简单地称 $P$ 是一个$(m,2s+\tau)$**子**空间.

我们用$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$表示$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$的所有$(m,2s+\tau)$子空间所成的集合. 如果$\delta=0$或2，有时就简单地分别记为$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu)$或$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+2)$. 再用$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$表示$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$中子空间的交所成的集合. 如果$\delta=0$或2，有时又简单地分别记为$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu)$或$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+2)$，并且约定$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中空集的交是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$. 通过$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中子空间的反包含关系来规定$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$的序，那么$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$是一个有限格.

**定义8.2**　由$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$生成的格$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$称为**由维数** $m$ **和秩**$2s+\tau$ **的子空间生成的格**.

有时为了书写方便，记$\mathscr{M}_5=\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$，$\mathscr{L}_5=\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$.

## §8.2 $(m,2s+\tau)$子空间存在的条件

从定理5.1可以得到

**定理8.1** $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中关于$S_{2\nu+\delta,\Delta}$存在$(m,2s+\tau)$子空间当且仅当

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s=0,\\ \nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1.\end{cases}\tag{8.1}$$

**证明** 我们分$\tau=0$和$\tau=1$两种情形.

(a) $\tau=0$. 对于$\delta=0$或1，(8.1)变成

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s.\tag{8.2}$$

根据定理5.1，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中存在$(m,2s,s)$型子空间当且仅当(8.2)成立. 但$(m,2s,s)$型子空间是$(m,2s)$子空间. 所以在(8.2)成立时，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中存在$(m,2s)$子空间.

反之，假设$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中存在$(m,2s)$子空间，并且令$P$是一个$(m,2s)$子空间，那么$P$是$(m,2s,s)$型，或$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 如果前一种情形出现，那么由定理5.1，有(8.2)成立. 然而在后一种情形出现时，又由定理5.1，有$2s\leqslant m\leqslant\nu+(s-1)+\delta$. 因而在$\delta=0$或1时，也有(8.2)成立.

对于$\delta=2$，(8.1)变成

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } s=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } s\geqslant 1.\end{cases}\tag{8.3}$$

当$s=0$时，(8.3)变成$0\leqslant m\leqslant\nu$. 由定理5.1，存在$(m,0,0)$型子空间，而$(m,0,0)$型子空间是$(m,0)$子空间. 现在设$s\geqslant1$. 由定理5.1，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中存在$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间当且仅当(8.3)成立. 但$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间是$(m,2s)$子空间. 所以，

当(8.3)成立时，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中存在$(m,2s)$子空间.

反之，假设$\mathbb{F}_q^{(2\nu-\delta)}$ 中存在$(m,2s)$子空间，并且令$P$是一个$(m,2s)$子空间．那么$P$是$(m,2s,s)$型，或是$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间．如果前一种情形出现，那么由定理5.1，有(8.2)成立，因而(8.3)成立；如果后一种情形出现，那么$s\geqslant 1$．再由定理5.1，有(8.3)成立．

(b) $\tau=1$．对于$\delta=0$，(8.1)变成

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s. \tag{8.4}$$

根据定理5.1，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在$(m,2s+1,s,1)$型或$(m,2s+1,s,z)$型子空间当且仅当(8.4)成立．但$(m,2s+1)$子空间是$(m,2s+1,s,1)$型，或$(m,2s+1,s,z)$型子空间．因此在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在$(m,2s+1)$子空间当且仅当(8.4)成立.

对于$\delta=2$，(8.1)变成

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1. \tag{8.5}$$

按照$\delta=0$的情形，可以证明：$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中存在$(m,2s+\tau)$子空间当且仅当(8.5)成立.

对于$\delta=1$，(8.1)也变成(8.5)．由定理5.1，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中存在$(m,2s+1,s,\Delta)$型子空间当且仅当(8.5)成立．但$(m,2s+1,s,\Delta)$型子空间是$(m,2s+1)$子空间，所以在(8.5)成立时，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中就存在$(m,2s+1)$子空间.

反之，假设$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中存在$(m,2s+1)$子空间，并且令$P$是一个$(m,2s+1)$子空间，那么$P$是$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，其中$\Gamma=\Delta$或$\Gamma\neq\Delta$．如果$\Gamma=\Delta$，那么由定理5.1，有(8.5)成立；如果$\Gamma\neq\Delta$，那么由定理5.1有(8.4)成立．因而(8.5)也成立. □

由$(m,2s+\tau)$子空间和$(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$型子空间的定义，易知

$$\mathcal{M}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)=\mathcal{M}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\cup\,\mathcal{M}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta),$$
$$\mathcal{M}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)=\mathcal{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\cup\,\mathcal{M}(m,2s+1,s,z;2\nu+\delta,\Delta).$$

因而

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta),$$
$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\cup\mathscr{L}(m,2s+1,s,z;2\nu+\delta,\Delta).$$

根据推论2.9可得

**定理8.2** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 2$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1)

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s=0,\\ \nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau\geqslant 1.\end{cases}$$

那么$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$是一个有限原子格，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$和$\bigcap_{X\in\mathscr{M}_5}X$是它的最小元和最大元，而$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$是它的原子集合.

## §8.3 若干引理

**引理8.3** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta),$$

除非

$$2s+\tau\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases}\tag{8.6}$$

成立时，"$\delta=\tau=0$，$s\geqslant 1$"，"$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2$，$\tau=0$，$s\geqslant 1$"的三种情形中有一种出现.

**证明** 我们只需证明：

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta),$$

除非(8.6)成立时，"$\delta=\tau=0$，$s\geqslant 1$"，"$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2$，$\tau=0$，$s\geqslant 1$"的三种情形中有一种出现.

如果$m-1<2s+\tau$，那么

$$\mathscr{M}(m-1,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)=\phi\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta).$$

现在设 $m-1\geqslant 2s+\tau$. 我们分 $\tau=0$ 和 $\tau=1$ 两种情形.

(a) $\tau=0$. 在这种情形下，(8.1)变成

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } s=0\text{，或 } s\geqslant 1 \text{ 而 } \delta=0 \text{ 或 } 1,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } s\geqslant 1 \text{ 而 } \delta=2.\end{cases}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是 $(m-1,2s,s)$ 型，或是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间. 再分以下两种情形.

(a.1) $P$ 是 $(m-1,2s,s)$ 型子空间. 如果

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s,$$

那么由定理5.1，存在 $(m,2s,s)$ 型子空间. 再由引理5.3，有 $P\in\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)$. 但 $\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$.

然而，如果

$$2s\leqslant m=\nu+s+1,$$

那么必有 $s\geqslant 1$，$\delta=2$. 根据定理5.1，不存在任何 $(m,2s,s)$ 型子空间. 所以 $\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)=\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,2\nu+\delta,\Delta)$. 由定理5.11，可知 $P\notin\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta)$. 因而 $P\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$. 这正是我们所排除的第三种情形.

(a.2) $P$ 是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间. 这时必有 $s\geqslant 1$. 如果

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s-1 \text{ 而 } \delta=0,$$
$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s \quad\text{ 而 } \delta=1,$$

或

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s+1 \text{ 而 } \delta=2,$$

那么由定理5.1，存在 $(m,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间，并且根据引理5.3，有 $P\in\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta)$. 但是 $\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$，因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$.

然而，如果

$$2s\leqslant m=\nu+s \text{ 而 } \delta=0,$$

那么由定理5.1，不存在任何 $(m,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间. 于是

$\mathscr{L}(m,2s;2\nu)=\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$. 再根据定理5.11，$P$ 不能包含在 $\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$中，因而它也不能包含在$\mathscr{L}(m,2s;2\nu)$中. 这正是我们排除的第一种情形.

(b) $\tau=1$. 在这种情形下，(8.1)变成

$$2s+1\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 }\delta=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 }\delta=1\text{ 或 }2.\end{cases}\tag{8.7}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是$(m-1,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，其中 $\Gamma=1$或$z$. 如果 $\delta=0$或2，那么由定理5.1，存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，再根据引理5.3，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$. 但是$\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)$.

如果 $\delta=1$. 再分以下两种情形.

(b.1) $P$ 是$(m-1,2s+1,s,\Delta)$型子空间. 根据定理5.1，存在$(m,2s+1,s,\Delta)$型子空间. 再根据引理5.3，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Delta;2\nu+\delta,\Delta)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu-1,\Delta)$.

(b.2) $P$ 是$(m-1,2s+1,s,z\Delta)$型子空间（当 $\Delta=z$ 时，$(m-1,2s+1,s,z^2)$型子空间就是$(m-1,2s+1,s,1)$型子空间）. 如果

$$2s+1\leqslant m=\nu+s,$$

那么如同情形(b.1)一样，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$.

然而，如果

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1,$$

那么由定理5.1，不存在$(m,2s+1,s,z\Delta)$型子空间. 因而 $\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Delta;2\nu+1,\Delta)$. 再由定理5.11，$P$ 不能包含在 $\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Delta;2\nu+1,\Delta)$中. 因而它也不会包含在$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$中. 这正是我们所要排除的第二种情形.

□

**引理8.4** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，$s\geqslant1$，并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau;2\nu+\delta,\Delta).$$

**证明** 我们只需证明：

$$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$$
$$\subset \mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu-\delta,\Delta).$$

(a) $\tau=0$，在这种情形下，(8.1)变成

$$2s \leqslant m \leqslant \begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \delta=0 \text{ 或 } 1, \\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases} \tag{8.8}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1);2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1)$型，或是$(m-1,2(s-2)+2,s-1)$型子空间. 再分以下两种情形：

(a.1) $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1)$型子空间. 由定理5.1，有

$$2(s-1)\leqslant m-1\leqslant \nu+s+1. \tag{8.9}$$

从(8.8)和(8.9)得到

$$2s\leqslant m\leqslant \nu+s.$$

所以根据定理5.1，存在$(m,2s,s)$型子空间. 再由引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)$. 但是$\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$，因此$P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$.

(a.2) $P$ 是$(m-1,2(s-2)+2,s-2)$型子空间. 这时必有 $s\geqslant 2$. 由定理5.1，有

$$2(s-2)+2\leqslant m-1\leqslant \nu+(s-2)+\min\{2,\delta\}. \tag{8.10}$$

从(8.8)和(8.10)得到

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s-1, & \text{如果 } \delta=0, \\ \nu+s, & \text{如果 } \delta=1, \\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases}$$

于是由定理5.1，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中存在$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 根据引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)$.

(b) $\tau=1$. 在这种情形下，(8.1)变成(8.7).

$$2s+1\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \delta=0, \\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=1 \text{ 或 } 2.\end{cases}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是$(m-1,$

$2(s-1)+1,s-1,\Gamma)$型子空间，其中$\Gamma=1$或$z$. 我们分$\delta=0$，1，或2三种情形.

(b.1) $\delta=0$. 从(8.7)得到：$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间. 根据引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu)$. 但是$\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu)\subset\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$.

(b.2) $\delta=1$. 因为$P$是$(m-1,2(s-1)+1,s-1,\Gamma)$型子空间，所以由定理5.1，有

$$2(s-1)+1\leqslant m-1\leqslant\begin{cases}\nu+(s-1)-1, & \text{如果 } \Gamma=\Delta,\\ \nu+s-1, & \text{如果 } \Gamma\neq\Delta.\end{cases}\tag{8.11}$$

然后对于$\Gamma=\Delta$，从(8.7)和(8.11)得到

$$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1.$$

因此可知$\mathbb{F}_q^{(2\nu-1)}$中存在$(m,2s+1,s,\Delta)$型子空间. 由引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Delta;2\nu+1,\Delta)$，因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$.

对于$\Gamma\neq\Delta$，从(8.7)和(8.11)得到

$$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s.$$

由此又可知$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间. 根据引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+1,\Delta)$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,2\nu+1,\Delta)$.

(b.3) $\delta=2$. 从(8.7)可知$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$中存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间. 根据引理5.4，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+2)$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$. □

**引理8.5** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant1$，并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1)，而$\tau=1$. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+\delta,\Delta),$$

除非

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1\tag{8.12}$$

和$\delta=1$同时成立.

**证明** 对于$(m,2s+1)$，(8.1)变成(8.7)

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \begin{cases} \nu+s, & \text{如果 } \delta=0, \\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=1 \text{ 或 } 2. \end{cases}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是$(m-1,2s,s)$型，或是$(m-1,2(s-1)+2,s-1)$型子空间．我们分以下两种情形：

(a) $P$ 是$(m-1,2s,s)$型子空间．这时再分 $\delta=0,1$或2三种情形．

(a.1) $\delta=2$．在这种情形．由定理5.1，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间，其中 $\Gamma=1$或 $z$．根据引理5.5，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+2,\Delta)$．因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s-1,2\nu+2,\Delta)$．

下面我们假定 $\delta=0$或1．不失一般性，可假定

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ I^{(s)} & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-1$．设$\sigma_2=\nu+s-m+1$．从(8.12)得到$\sigma_1\geqslant 0$和$\sigma_2\geqslant 0$．于是存在$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵 $X$ 和$(2\delta_2+\delta)\times(2\nu+\delta)$矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & & & & & \Delta \end{bmatrix}.$$

(a.2) $\delta=0$．这时 $\sigma_2\geqslant 1$．令 $y_1$和 $y_{\sigma_2+1}$分别是 $Y$ 的第1和 $\sigma_2$

$+1$行. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_{\sigma_2+1} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 - y_{\sigma_2+1} \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间,并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu,\Delta)$.

(a.3) $\delta=1$. 我们又分以下两种情形.

(i) 条件

$$2s+1 \leqslant m < \nu+s+1 \tag{8.14}$$

成立. 这时也有 $\sigma_2 \geqslant 1$. 如同情形(a.2)一样，我们可以证明 $P \in \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$.

(ii) 条件(8.12)

$$2s+1 \leqslant m = \nu+s+1$$

成立. 那么 $\sigma_2=0$，并且 $Y$ 是一个行向量. 显然，

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的$(m,2s+1)$子空间. 因而 $P \notin \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$. 所以,在(8.12)和 $\delta=1$同时成立时,引理8.5不成立.

(b) $P$ 是$(m-1,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 这时显然有 $s \geqslant 1$. 我们又分 $\delta=0,1$,或2三种情形.

(b.1) $\delta=0$. 这时由定理5.1,从(8.7)得到$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在$(m,2s+1,s,\Gamma)$型子空间,其中 $\Gamma=1$或 $z$. 再由引理5.7,$P \in \mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu,\Delta)$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu,\Delta)$.

下面我们假定 $\delta=1$或2. 不妨设

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s-1$. 令 $\sigma_2=\nu+s-m+1$. 从(8.7)得到 $\sigma_1\geqslant 0$和 $\sigma_2\geqslant 0$. 于是存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵 $X$ 和$(2\sigma_2+\delta)\times(2\nu+\sigma)$矩阵 $Y$，使得(8.13)是非奇异的，并且

$$
\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
0 & I^{(\nu-1)} & & & & & & & \\
I^{(s-1)} & 0 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & -z & & & & & \\
 & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\
 & & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & \\
 & & & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\
 & & & & & & I^{(\sigma_2)} & 0 & \\
 & & & & & & & & \Delta_1
\end{bmatrix},
$$

其中 $\Delta_1$是 $\delta\times\delta$ 非奇异对称矩阵.

(b.2) $\delta=2$. 由 Witt 定理，可以假定

$$
\Delta_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

设 $y_{2\sigma_2+1}$和 $y_{2\sigma_2+2}$分别是 $Y$ 的$2\sigma_2+1$行和$2\sigma_2+2$行. 那么

$$
\begin{bmatrix} P \\ y_{2\sigma_2+1}+y_{2\sigma_2+2} \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y_{2\sigma_2+1}-y_{2\sigma_2+2} \end{bmatrix}
$$

是一对$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2,\Delta)$.

(b.3) $\delta=1$. 我们又分以下两种情形.

(i) 条件(8.14)成立. 这时 $\sigma_2\geqslant 1$. 如同情形(a.2)一样，我们也得到 $P\in\mathscr{L}(m,2s-1;2\nu+1,\Delta)$.

(ii) 条件(8.12)成立. 这时 $\sigma_2=0$，并且 $Y$ 是一个行向量. 如同

情形(a.3)中的(ii),我们得到$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$. □

**引理8.6** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 2$,并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1),而$\tau=1$. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-2,2s;2\nu+\delta,\Delta). \tag{8.15}$$

**证明** 如果$\delta=0$或2,那么由引理8.3,有

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s+1;2\nu+\delta,\Delta).$$

如果$(m-1,2s+1)$不满足(8.1),那么$m-1<2s+1$. 因而$(m-2,2s)$也不满足(8.1),并且由定理8.1,有$\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+\delta,\Delta)=\phi$. 于是(8.15)显然成立. 然而,如果$(m-1,2s+1)$满足(8.1),那么由引理8.5,有

$$\mathscr{L}(m-1,2s+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-2,2s;2\nu+\delta,\Delta).$$

因此(8.15)成立.

留待我们考虑$\delta=1$的情形. 如果$(m-2,2s)$不满足(8.1),那么$\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+1,\Delta)=\phi$. 因而(8.15)成立. 现在设$(m-2,2s)$满足(8.1),也即

$$2s\leqslant m-2\leqslant\nu+s. \tag{8.16}$$

但是我们又有$(m,2s+1)$满足(8.1),也即

$$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1. \tag{8.17}$$

设$P\in\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+1,\Delta)$,那么$P$是$(m-2,2s,s)$型,或是$(m-2,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 我们分以下两种情形.

(a) $P$是$(m-2,2s,s)$型子空间. 我们可以假定

$$PS_{2\nu+1,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & \\ I^{(s)} & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-2$,设$\sigma_2=\nu+s-m+2$. 由(8.16)有$\sigma_1\geqslant 0$. 再根据(8.17)有$\sigma_2\geqslant 1$. 于是存在$\sigma_1\times(2\nu+1)$矩阵$X$和$(2\sigma_2+1)\times(2\nu+1)$矩阵$Y$,使得(8.13)是非奇异的,并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ I^{(s)} & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & & & & & \Delta \end{bmatrix}.$$

设 $y_1$，$y_{\sigma_2+1}$和 $y_{2\sigma_2+1}$分别是$Y$ 的第1，第 $\sigma_2+1$和最后一行. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_{2\sigma_2+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ y_{\sigma_2+1} \\ y_{2\sigma_2+1} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 - \frac{1}{2}\Delta y_{\sigma_2+1} + y_{2\sigma_2+1} \\ -\Delta y_{\sigma_2+1} + y_{2\sigma_2+1} \end{bmatrix}$$

全是$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1,\Delta)$.

(b) $P$ 是$(m-2,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 这时$s\geqslant1$. 我们可假定

$$PS_{2\nu+1,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-2$. 设$\sigma_2=\nu+s-m+2$. 由(8.16)有$\sigma_1\geqslant0$,并且由(8.17)有$\sigma_2\geqslant1$. 于是存在一个$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵$X$和$(2\sigma_2+1)\times(2\nu+1)$矩阵$Y$,使得(8.13)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -z & & & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & & & I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & & & & & & & z_1 \end{bmatrix},
$$

其中

$$
\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -z & \\ & & z_1 \end{bmatrix}
$$

合同于

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \Delta \end{bmatrix}.
$$

如同上面的情形(a)一样,可以证明 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1, \Delta)$.

□

**引理8.7** 设 $n = 2\nu+\delta > m \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, 并且 $(m, 2s+\tau)$ 满足(8.1), 而 $\tau = 0$. 那么

$$
\mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+\delta, \Delta) \supset \mathscr{L}(m-1, 2(s-1)+1; 2\nu+\delta, \Delta),
$$

除非

$$
2s \leqslant m = \begin{cases} \nu + s, & \text{如果 } \delta = 0, \\ \nu + s + 1, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases} \tag{8.18}
$$

**证明** 由题设 $(m, 2s)$ 满足(8.1), 也即

$$
2s \leqslant m \leqslant \begin{cases} \nu + s, & \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ \nu + s + 1, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases} \tag{8.19}
$$

设 $P \in \mathscr{M}(m-1, 2(s-1)+1; 2\nu+\delta, \Delta)$, 那么 $P$ 是 $(m-1, 2(s-$

$1)+1, s-1, \Gamma)$ 型子空间，其中 $\Gamma=1$ 或 $z$. 我们可以假定

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & \\ & & \Gamma & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s$. 设 $\sigma_2=\nu+s-m$. 从(8.19)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 0, & \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ -1, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

于是存在 $\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+1+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(8.13)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & \\ & & \Gamma & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & \Sigma \end{bmatrix},$$

其中

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & -\Gamma \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2)} & & \\ I^{(\sigma_2)} & 0 & & \\ & & -\Gamma & \\ & & & \Delta \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2+1)} & \\ I^{(\sigma_2+1)} & 0 & \\ & & -\Gamma Z \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

我们分以下两种情形.

(a) 条件

$$2s \leqslant m < \begin{cases} \nu + s, & \text{如果}\ \delta = 0\ \text{或}\ 1, \\ \nu + s + 1, & \text{如果}\ \delta = 2 \end{cases}$$

成立. 当$\delta=0$或1时，我们有$\sigma_2 \geqslant 1$. 令$y_1$和$y_2$分别是$Y$的第1行和$\sigma_2+1$行；当$\delta=2$时，我们有$\sigma_2 \geqslant 0$. 设$y_1$和$y_2$分别是$Y$的第1行和$\sigma_2+2$行. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s)$子空间,并且它们的交是$P$. 因此$P \in \mathscr{L}(m,2s;2\nu+1,\Delta)$.

(b) 条件

$$2s \leqslant m = \begin{cases} \nu + s, & \text{如果}\ \delta = 0\ \text{或}\ 1, \\ \nu + s + 1, & \text{如果}\ \delta = 2 \end{cases} \tag{8.20}$$

成立. 这时再分$\delta=0$，1，或2三种情形.

(b.1) $\delta=0$. 从(8.20)得到$\sigma_2=0$. 因而$Y$是一个行向量. 并且

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含$P$的$(m,2s)$子空间. 因此$P \notin \mathscr{L}(m,2s;2\nu,\Delta)$.

(b.2) $\delta=1$. 从(8.20)又得到$\sigma_2=0$. 于是$\dim Y=2$. 设$y_1$和$y_2$分别是$Y$的第1和第2行，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s)$子空间,并且它们的交是$P$. 因此$P \in \mathscr{L}(m,2s;2\nu+1,\Delta)$.

(b.3) $\delta=2$. 从(8.20)得到$\sigma_2+1=0$, 并且$Y$是一个行向量. 那么

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的子空间. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2,\Delta)$. □

**引理8.8** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 2$，$s\geqslant 1$，并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1)，而 $\tau=0$. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta,\Delta). \tag{8.21}$$

**证明** 如果 $\delta=1$，那么由引理8.3，有

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1,\Delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+1,\Delta).$$

如果$(m-1,2s)$不满足(8.1)，那么 $m-1<2s$. 因而$(m-2,2(s-1)+1)$不满足(8.1). 由定理8.1，$\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+1,\Delta)=\phi$. 显然，(8.21)成立. 然而，如果$(m-1,2s)$满足(8.1). 那么由引理8.7，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+1,\Delta)\\ &\supset\mathscr{L}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+1,\Delta).\end{aligned}$$

因此(8.21)也成立.

现在考虑 $\delta=0$或2的情形. 如果$(m-2,2(s-1)+1)$不满足(8.1)，那么 $\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta,\Delta)=\phi$，因而(8.21)成立. 现在设$(m-2,2(s-1)+1)$满足(8.1)，也即

$$2s-1\leqslant m-2\leqslant\begin{cases}\nu+s-1, & \text{如果 } \delta=0,\\ \nu+s, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases} \tag{8.22}$$

但是$(m,2s)$也满足(8.1)，也即

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \delta=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases} \tag{8.23}$$

设 $P\in\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $P$ 是$(m-2,2(s-1)+1,s-1,\Gamma)$型子空间，其中 $\Gamma=1$或 $z$. 我们可假定

$$PS_{2\nu+\delta,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-1)} & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & \\ & & \Gamma & \\ & & & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s-1$. 设 $\sigma_2=\nu-s-m+1$. 由(8.22)有 $\sigma_1\geqslant 0$. 再由

(8.22)和(8.23)有 $\sigma_2 \geqslant 0$. 于是存在 $\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+1+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$, 使得(8.13)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+\delta,\Delta} \begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & \\ I^{(s-1)} & 0 & & & & \\ & & \Gamma & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & \Sigma \end{bmatrix},$$

其中

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ I^{(\sigma_2)} & 0 & \\ & & -\Gamma \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2+1)} & \\ I^{(\sigma_2+1)} & 0 & \\ & & -\Gamma z \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

由(8.22)和(8.23)可知, 当 $\delta=0$ 时, $\sigma_2 \geqslant 1$, 而在 $\delta=2$ 时, $\sigma_2+1 \geqslant 1$. 类似于引理8.6的证明, 可以证得 $P \in \mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+\delta, \Delta)$.

## §8.4 格 $\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta, \Delta)$ 之间的包含关系

下面我们给出格 $\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta, \Delta)$ 之间的包含关系.

**定理8.9** 设 $n=2\nu+\delta \geqslant 1$, 假定 $(m, 2s+\tau)$, $(m_1, 2s_1+\tau_1)$ 满足(8.1), 也即

$$2s+\tau \leqslant m \leqslant \begin{cases} \nu+s, & \text{如果 } \tau = 0 \text{ 而 } s = 0, \\ \nu+s+\max\{0, \delta-1\}, & \text{如果 } \tau = 0 \text{ 而 } s \geqslant 1, \\ \nu+s+\min\{1, \delta\}, & \text{如果 } \tau = 1, \end{cases}$$

和

$$2s_1+\tau_1\leqslant m_1\leqslant\begin{cases}\nu+s_1, & 如果\ \tau_1=0而\ s_1=0,\\ \nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, & 如果\ \tau_1=0而\ s_1\geqslant 1,\\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, & 如果\ \tau_1=1\end{cases}$$

成立，而 $m\neq n$. 如果(8.6)

$$2s+\tau\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & 如果\ \tau=0\ 而\ s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & 如果\ \tau=1\end{cases}$$

**表 8.1**

| $\delta$ | $\Delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $t,t'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $2\leqslant t'\leqslant m-2$ |
| 0 | $\phi$ | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 1 | 1或 $z$ | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 1或 $z$ | 1 | 1 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $0\leqslant t\leqslant s$ |
| 1 | 1或 $z$ | 1 | 1 | $m-t'$ | $s\geqslant 0$ | $2\leqslant t'\leqslant m-1$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $2\leqslant t'\leqslant m-2$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & z\end{bmatrix}$ | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $0\leqslant t\leqslant s-1$ |

成立时，在表8.1中所列的每一种情形不出现. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta) \tag{8.24}$$

的充分必要条件是

$$2m-2m_1\geqslant(2s+\tau)-(2s_1+\tau_1)\geqslant 0. \tag{8.25}$$

**证明** 先证明充分性. 由(8.25)可以假定

$$(2s+\tau)-(2s_1+\tau_1)=2t+l \tag{8.26}$$

和

$$m-m_1=t+t', \tag{8.27}$$

其中 $t$，$t'\geqslant 0$，而

$$l=\begin{cases}0, & \text{如果 } \tau=\tau_1. \\ 1, & \text{如果 } |\tau-\tau_1|=1.\end{cases}$$

从(8.25),(8.26)和(8.27)得到$2t'\geqslant t$.

因为$(m,2s+\tau)$满足(8.1),所以对于$1\leqslant i\leqslant t$ 成立的每个整数$i$,$(m-i,2(s-i)+\tau)$也满足(8.1).因而可以连续地应用引理8.4,得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)&\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\\&\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\tau;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{8.28}$$

我们分$l=0$和$l=1$两种情形.

(a) $l=0$. 在这种情形,我们有$\tau=\tau_1$,并且从(8.26)得到$s-s_1=t$.因而

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{8.29}$$

再分以下两种情形:

(a.1) $t'=0$. 从 (8.28)和(8.29)得到(8.24).

(a.2) $t'>0$. 由$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.1),可知对于$0\leqslant j\leqslant t'-1$,$(m_1+t'-j,2s_1+\tau_1)$都满足(8.1). 这时可以连续地应用引理8.3,得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-t',2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}$$

除非对满足$0\leqslant j\leqslant t'-1$的某个$j$,$(m_1+t'-j,2s_1+\tau_1)$满足

$$2s_1+\tau_1\leqslant m_1+t'-j=\begin{cases}\nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau_1=0 \text{ 而 } s_1\geqslant 1, \\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, \text{如果 } \tau=1.\end{cases}\tag{8.30}$$

和三种情形:"$\delta=\tau_1=0,s_1\geqslant 1$","$\delta=\tau_1=1$"和"$\delta=2,\tau_1=0,s_1\geqslant 1$"之一出现.容易证明:对于某个$j$,$0\leqslant j\leqslant t'-1$,如果$(m_1+t'-j,2s_1+\tau_1)$满足(8.30),那么必有$j=0$. 事实上,从(8.27)和(8.30)

得到

$$m-t-j=m_1-t'-j=\begin{cases}\nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau_1=0 \text{ 而 } s_1\geqslant 1, \\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau_1=1.\end{cases}$$

因为 $t=s-s_1$ 和 $\tau=\tau_1$，所以

$$m-j=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s_1\geqslant 1, \\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, \quad \text{如果 } \tau=1.\end{cases}$$

但 $s\geqslant s_1$ 和 $(m,\ 2s+\tau)$ 满足(8.1)，因而 $j=0$. 于是

$$\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta). \tag{8.31}$$

除非$(m_1+t',2s_1+\tau_1)$满足

$$2s_1+\tau_1\leqslant m_1+t'=\begin{cases}\nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau_1=0 \text{ 而 } s_1\geqslant 1, \\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, \text{如果 } \tau_1=1.\end{cases} \tag{8.32}$$

和三种情形:"$\delta=\tau_1=0,s_1\geqslant 1$","$\delta=\tau=\tau_1=1$"和"$\delta=2,\tau=\tau_1=0$, $s_1\geqslant 1$"之一出现.

从(28),(29)和上述结论我们得到(8.24),除非(8.32)和三种情形:"$\delta=\tau=\tau_1=0,s_1\geqslant 1$","$\delta=\tau=\tau_1=1$"和"$\delta=2,\tau=\tau_1=0,s_1\geqslant 1$"之一出现. 因为 $t'>0$和 $m_1+t'=m-t$,所以有$1\leqslant t'\leqslant m-t$. 现在假设(8.6)成立.那么

$$2s_1+\tau_1\leqslant 2s-2t+\tau\leqslant m-2t=m_1-t+t'\leqslant m_1+t'.$$

这是(8.32)的前半部分,而

$$m_1+t'=m-t$$

$$=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}-t=\nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{如果 } \tau_1=0,s\geqslant 1, \\ \nu+s+\min\{1,\delta\}-t=\nu+s_1+\min\{1,\delta\}, \text{如果 } \tau_1=1,\end{cases}$$

再由 $s_1\geqslant 1$代替 $s\geqslant 1$,就可知(8.32)的后半部分成立. 如果 $s_1=0$, (8.31)自然成立. 但是，当 $t\geqslant 1$，$t'\geqslant 2$时，如果 $(m,\ 2s+\tau)$ 满

足(8.6)，那么(8.24)成立. 因此，在情形(a.2)，我们总有(8.24)成立，除非(8.6)成立和列在表8.1中的情形“$\delta=\tau=\tau_1=0, s_1\geqslant 1$”，“$\delta=\tau=\tau_1=1$”和“$\delta=2, \tau=\tau_1=0, s_1\geqslant 1$”之一出现.

(b) $l=1$. 因为$2t'>l$，所以$t'>0$. 从$l=1$得到$|\tau-\tau_1|=1$. 再分“$\tau=1, \tau_1=0$”和“$\tau=0, \tau_1=1$”两种情形.

(b.1) $\tau=1$，$\tau_1=0$. 由(8.26)又有$s-s_1=t$. 所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t, 2(s-t)+1; 2\nu+\delta, \Delta)\\&=\mathscr{L}(m_1+t', 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta).\end{aligned}\tag{8.33}$$

我们又分以下两种情形.

(b.1.1) $t'=1$. 这时，在题设(8.1)，$l=1$，$\delta=\tau=1$，$\tau_1=0$和$t'=1$的条件下，可以证明

$$2s_1+1\leqslant m_1+1=\nu+s_1+1\tag{8.34}$$

和(8.6)等价.

事实上，如果(8.34)成立，那么由(8.27)和(8.34)有

$$m-t=\nu+s_1+1.$$

但是$t=s-s_1$，所以

$$m=\nu+s+1.$$

因为$(m, 2s+1)$满足(8.1)和$\delta=\tau=1$，所以(8.6)成立. 反之，假设(8,6)成立. 因为$s-s_1=t$，$2s+\tau\leqslant m$，$m-t=m_1+t'$和$t'=1$，所以

$$\begin{aligned}2s_1+1&=2(s-t)+\tau=(2s+\tau)-2t\leqslant m-2t\\&=m_1-t+t'\leqslant m_1+t'=m_1+1\end{aligned}$$

和

$$m_1+1=m_1+t'=m-t=m-s+s_1=\nu+s_1+1.$$

因此(8.34)成立.

根据题设，在(b.1.1)的情形，如果(8.6)成立，而表8.1的第3行所列的情形不出现时，那么当(8.34)出现时，$\delta=1$也不会出现，而$(m_1+1, 2s_1+1)$满足(8.1)，由引理8.5，有

$$\mathscr{L}(m_1+1, 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta)\supset\mathscr{L}(m_1, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta).\tag{8.35}$$

从(8.28),(8.33),(8.35),以及上述的结论,在(b.1.1)的情形,(8.24)成立,除非(8.6)成立时,列在表8.1中“$\delta=\tau=1$, $\tau_1=0$, $s_1\geqslant 0$”的情形出现.

(b.1.2) $t'\geqslant 2$. 首先考虑$\delta=0$或2的情形. 因为$(m_1+t', 2s_1+1)$满足(8.1),所以对于$0\leqslant j\leqslant t'-1$成立的每个$j$, $(m+t'-j, 2s_1+1)$满足(8.1). 连续地应用引理8.3,得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t', 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1, 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta)\\&\quad\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1+1, 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta).\end{aligned}\tag{8.36}$$

再根据引理8.5, 有

$$\mathscr{L}(m_1+1, 2s_1+1; 2\nu+\delta, \Delta)\supset\mathscr{L}(m_1, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta).\tag{8.37}$$

从(8.28),(8.33),(8.36)和(8.37)得到(8.24).

其次考虑$\delta=1$的情形. 由引理8.6,有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t', 2s_1+1; 2\nu+1, \Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-2, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta).\end{aligned}\tag{8.38}$$

如果$t'=2$,那么从(8.28),(8.33)和(8.38)可得(8.24). 如果$t'>2$,那么通过连续地应用引理8.3,可得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t'-2, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-3, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta)\\&\quad\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1, 2s_1; 2\nu+\delta, \Delta).\end{aligned}\tag{8.39}$$

从(8.28),(8.33),(8.38)和(8.39)得到(8.24).

(b.2) $\tau=0$, $\tau_1=1$. 由(8.26)有$s-s_1=t+1$. 所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m-t, 2(s-t)+\tau; 2\nu+\delta, \Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t', 2(s_1+1); 2\nu+\delta, \Delta).\end{aligned}\tag{8.40}$$

我们又分以下两种情形.

(b.2.1) $t'=1$. 如同在(b.1.1)的情形,可以证明:在题设(8.1), $l=1$, $\tau=0$, $\tau_1=1$和$t'=1$的条件下,

$$2(s_1+1)\leqslant m_1-1=\begin{cases}\nu+s_1+1, \text{如果}\ \delta=0,\\ \nu+s_1+2, \text{如果}\ \delta=2\end{cases}\tag{8.41}$$

等价于(8.6). 于是得到结论：在题设(8.6)成立，而"$l=1,\tau=0,\tau_1=1$"和 $t'=1$ 的条件下，如果(8.41)成立，那么"$\delta=0,\tau=0,\tau_1=1$"或"$\delta=2,\tau=0,\tau_1=1$"的情形不会出现. 根据引理8.7，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{8.42}$$

从(8.28)，(8.40)，(8.42)，以及上述的结论，可知(8.24)成立，除非(8.6)成立时，表8.1所列"$\delta=0$，$\tau=0$，$\tau_1=1$"，"$\delta=2$，$\tau=0$，$\tau_1=1$"的两种情形之一出现.

(b.2.2) $t'\geqslant 2$. 首先考虑 $\delta=1$ 的情形. 因为 $(m_1+t',2(s_1+1))$ 满足(8.1)，所以对于 $0\leqslant j\leqslant t'-1$ 成立的每个 $j$，$(m_1-t'-j,2(s_1+1))$ 也满足(8.1). 通过连续地应用引理8.3，可得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+1,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2(s_1+1);2\nu+1,\Delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+1,\Delta).\end{aligned}\tag{8.43}$$

再由引理8.7，有

$$\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+1,\Delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta).\tag{8.44}$$

从(8.28)，(8.40)，(8.43)和(8.44)得到(8.24).

其次考虑 $\delta=0$ 或2的情形. 根据引理8.8，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{8.45}$$

如果 $t'=2$，那么从(8.28)，(8.40)和(8.45)得到(8.24).

如果 $t'>2$，那么通过连续地应用引理8.3，就有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-3,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta,\Delta).\end{aligned}\tag{8.46}$$

然后从(8.28)，(8.40)，(8.45)和(8.46)也得到(8.24).

下面再证明必要性. 由 $\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)$ 和 $\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,$

$\Delta)$，有 $\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 对于任意 $Q\in\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$，那么 $Q$ 是 $\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$ 中一些子空间的交，于是存在 $P\in\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$，使得 $Q\subset P$. 如果 $Q=P$，那么 $m_1=m,s_1=s,\tau_1=\tau$. 因而(8.25)成立. 现在假设 $Q\subsetneq P$，那么 $m_1<m,2s_1+\tau_1\leqslant 2s+\tau$，并且 $s_1\leqslant s$. 令 $m-m_1=t$. 因为子空间 $P$ 和 $Q$ 的秩分别是 $2s+\tau$ 和 $2s_1+\tau_1$，所以 $2s_1+\tau_1\geqslant 2s+\tau-2t$. 因此(8.25)成立. □

**定理8.10** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，$(m,2s+\tau)$ 满足(8.6)和 $m\neq n$，而 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(8.1)和(8.25)，并且 $m\neq m_1$. 如果表8.1所列的情形之一出现，而在 $\tau_1=\tau$ 时，又假定 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 不满足(8.6). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)\not\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta). \tag{8.47}$$

**证明** 由题设，当表8.1所列的每种情形出现时，由 $(m,2s_1+\tau_1)$ 满足(8.1)，都有 $\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\neq\phi$.

现在对表8.1的第1行，第4行和第9行所列的情形进行验证，其余各行的情形可类似地进行.

(a) 第1行. 这时 $\delta=0$，$\tau=\tau_1=0$，$m_1=m-t-1$ 和 $s_1=s-t$. 而 $(m,2s)$ 所满足的(8.6)变成

$$2s\leqslant m=\nu+s.$$

所以 $\mathscr{L}(m,2s;2\nu)=\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$. 设 $P\in\mathscr{M}(m_1,2s_1;2\nu)$，那么 $P$ 是一个 $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ 型子空间，或是 $(m_1,2s_1,s_1)$ 型子空间. 当 $P$ 是前一种情形时，不妨设

$$PS_{2\nu}{}^tP=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1-1)} & & & \\ I^{(s_1-1)} & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -z & \\ & & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m_1-2s_1=m-2s+t-1$. 令 $\sigma_2=2(\nu+s_1-m_1)=2(\nu+s-$

$m+1$). 由$(m_1, 2s_1)$满足(8.1),而$(m, 2s)$满足(8.6),所以$\sigma_1 \geqslant 0$和$\sigma_2=2$. 当$t=0$时,由引理8.3证明中的情形(a.2),可知(8.47)成立. 现在考虑$t \geqslant 1$的情形. 这时存在$\sigma_1 \times 2\nu$矩阵$X$和$\sigma_2 \times 2\nu$矩阵$Y$,使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1-1)} & & & & & \\ I^{(s_1-1)} & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -z & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

其中$\Sigma_2$是$2\times 2$非奇异对称矩阵,其定号部分的级数是2. 假设$Q$是包含$P$的$m$维子空间,那么$Q$具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} + y_{t+1} \end{bmatrix}, \tag{8.48}$$

其中$x_i \in X$,$y_i \in Y$,$i=1, 2, \cdots, t+1$,并且$x_1+y_1, \cdots, x_{t+1}+y_{t+1}$线性无关. 令

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s_1 \\ \sigma_1 \end{matrix}.$$

那么$P_1 S_{2\nu} {}^tX = 0$,$P_2 S_{2\nu} {}^tX = I^{(\sigma_1)}$,并且

$$QS_{2\nu} {}^tQ = \begin{bmatrix} M(2(s_1-1)+2, s_1-1) & & \\ & 0 & P_2 S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^tP & \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{t+1} \end{bmatrix} S_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{t+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{8.49}$$

如果$Q$是$(m,2s,s)$型子空间，那么

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t-1} \end{bmatrix} = t-1.$$

我们可假定$x_1$，$x_2$，…，$x_{t-1}$线性无关，$x_t=x_{t+1}=0$，而$y_t$，$y_{t+1}$线性无关. 因而

$$Y=\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \end{bmatrix},$$

并且由(8.49)可知形如(8.48)的$Q$具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ Y \end{bmatrix}.$$

而上述$Q$的交不是$P$. 因而在$\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)$中存在$P$，而$P\notin\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 因此(8.47)成立.

(2) 第4行. 这时$\delta=\tau=1$，$\tau_1=0$，$m_1=m-t-1$，$s_1=s-t$. 而$(m,2s+1)$和$(m_1,2s_1)$所分别满足的(8.6)和(8.1)依次变成(8.5)

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1 \tag{8.50}$$

和

$$2s_1\leqslant m_1\leqslant\nu+s_1. \tag{8.51}$$

设$P$是一个$(m_1,2s_1)$子空间,那么$P$是$(m_1,2s_1,s_1)$型子空间,或$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1\text{-}1)$型子空间. 当$P$是$(m_1,2s_1,s_1)$型子空间时，不妨设

$$PS_{2\nu+1,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ I^{(s_1)} & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m_1-2s_1=m-2s+t-1$. 令$\sigma_2=2(\nu-m_1+s_1)+1=2(\nu-$

$m+s+1)+1$. 那么由(8.50)和(8.51)得 $\sigma_1 \geqslant 0, \sigma_2=1$. 于是存在 $\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y=\langle y \rangle$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(2s_2, 2s_1, s_1) & & & \\ & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & \Delta \end{bmatrix}.$$

假设 $Q$ 是包含 $P$ 的 $m$ 维子空间，那么 $Q$ 具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + a_1 y \\ \vdots \\ x_{t+1} + a_{t+1} y \end{bmatrix}, \qquad (8.52)$$

其中 $x_i \in X$，$a_i \in \mathbb{F}_q$，$i=1, 2, \cdots, t+1$. 令

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s_1 \\ \sigma_1 \end{matrix}.$$

那么 $P_1 S_{2\nu+1,\Delta} {}^tX=0$，$P_2 S_{2\nu+1,\Delta} {}^tX=I^{(\sigma_1)}$，并且

$$QS_{2\nu+1,\Delta} {}^tQ = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & I^{(s_1)} \\ I^{(s_1)} & 0 \end{matrix} & & \\ & 0 & P_2 S_{2\nu+1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} S_{2\nu+1,\Delta} {}^tP_2 & \begin{bmatrix} a_1 y \\ \vdots \\ a_{t+1} y \end{bmatrix} S_{2\nu-1,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} a_1 y \\ \vdots \\ a_{t+1} y \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

如果形如(8.52)的 $Q$ 是$(m, 2s+1)$子空间，那么

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = t,$$

我们可设 $x_1, \cdots, x_t$ 线性无关，$x_{t+1}=0$，并且 $a_{t+1}\neq 0$. 于是 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ Y \end{bmatrix},$$

显然上述 $Q$ 的交不是 $P$. 同样，当 $P$ 是 $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1)$时，$P$ 也不是$(m, 2s+1)$子空间的交. 因此(8.47)成立.

(3) 第9行. 这时 $\delta=2$，$\tau=0$，$\tau_1=1$，$m_1=m-t-1$，$s_1=s-t-1$. 而$(m, 2s)$和$(m_1, 2s_1+1)$所分别满足的(8.6)和(8.1)依次变成

$$2s\leqslant m=\nu+s+1 \tag{8.53}$$

和

$$2s_1+1\leqslant m_1\leqslant \nu+s_1+1. \tag{8.54}$$

设 $P$ 是一个$(m_1, 2s_1+1)$子空间，那么 $P$ 是$(m_1, 2s_1+1, s_1, \Gamma_1)$型子空间，其中 $\Gamma_1=1$或 $z$. 不妨设

$$PS_{2\nu+2,\Delta}{}^tP=\begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & & \\ I^{(s_1)} & 0 & & \\ & & \Gamma_1 & \\ & & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m_1-2s_1-1=m-2s+t$. 令 $\sigma_2=2(\nu-m_1+s_1)+3=2(\nu-m+s)+3$. 由(8.53)和(8.54)得到 $\sigma_1\geqslant 0$，$\sigma_2=1$. 于是存在 $\sigma_1\times(2\nu+2)$矩阵 $X$，$\sigma_2\times(2\nu+2)$矩阵 $Y=(y)$，使得

$$
\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} S_{2\nu+2,\Delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & & & & \\ I^{(s_1)} & 0 & & & & \\ & & \Gamma_1 & & & \\ & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & I^{(\sigma_1)} & 0 & \\ & & & & & -\Gamma_1 z \end{bmatrix},
$$

（当 $\Gamma_1=z$ 时，$-\Gamma_1 z$ 取 $-1$）. 假设 $Q$ 是包含 $P$ 的 $m$ 维子空间，那么 $Q$ 具有形式(8.52). 按照(2)中的步骤进行，可知(8.47)成立.

□

## §8.5 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间在 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$ 中的条件

**定理8.11** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，$(m,2s+\tau)$ 满足(8.1)，而 $m\neq n$. 如果(8.30)

$$
2s+\tau\leqslant m<\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases}
$$

成立. 那么 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和满足(8.25)

$$
2m-2m_1\geqslant(2s+\tau)-(2s_1+\tau_1)\geqslant 0
$$

的所有子空间组成. 然而，如果(8.6)

$$
2s+\tau\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases}
$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间组成，其中 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(8.25)，并且不列在表8.2中.

**证明** 由我们的约定，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 假设 $(m,2s+\tau)$ 满足(8.30). 令 $Q$ 是一个 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间，其中 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(8.25). 那么 $Q\in\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$，这里的后一个包含关系由定理8.9得到. 反之，设 $Q$ 是 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间，并且

$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 那么存在一个$(m,2s+\tau)$子空间$P$,使得$Q\subset P$. 平行于定理8.9必要性的证明,可知(8.25)成立.

表 8.2

| $\delta$ | $\Delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$型子空间 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant1$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant1$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 0 | $\phi$ | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant0$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,1)$<br>或$(m_1,2s_1+1,s,z)$ |
| 1 | 1或$z$ | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant0$ | $(m_1,2s_1,s_1)$<br>或$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 1 | 1或$z$ | 1 | 1 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant0$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,z\Delta)$ |
| 1 | 1或$z$ | 1 | 1 | $m-t'$ | $s\geqslant0$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,z\Delta)$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant1$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant1$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1&\\&-z\end{bmatrix}$ | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant0$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,1)$<br>或$(m_1,2s_1+1,s_1,z)$ |

其中$t$和$t'$满足表8.1中的条件.

现在假设$(m,2s+\tau)$满足(8.6). 令$Q$是$(m_1,2s_1+\tau_1)$子空间. 当$(m_1,2s_1+\tau_1)$是不列在表8.1中的任一情形,我们用上一段的证明方法,可以证明:$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.25)当且仅当$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 下面考虑列在表8.1中的各种情形. 对于表8.1的1,2,5,6,7或8行,并且子空间$Q$的类型由表8.3给出,我们能证明$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.25)当且仅当$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. 取表8.3的第1行作为例子予以证明. 这时$Q$是$(m_1,2s_1,s_1)$型子空间. 由(8.6),在$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中不存在$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 因此$\mathscr{L}(m,2s;2\nu)=\mathscr{L}(m_1,2s,s;2\nu)$. 根据定理5.11,$Q\in\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta)$当且仅当$(m_1,2s_1,s_1)$满足第五章中的(5.15)式. 由该式

可导出(8.25). 因此,$Q\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu)$当且仅当$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.25). 留待我们考虑表8.2所列的各种情形. 在每一种情形,可平行于定理8.11的证明. 可知当$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.25)时,$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$. □

表 8.3

| $\delta$ | $\Delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$型子空间 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 0 | $\phi$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 1 | 1或$z$ | 1 | 1 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $(m_1,2s_1-1,s_1,\Delta)$ |
| 1 | 1或$z$ | 1 | 1 | $m-t'$ | $s-t'\geqslant 0$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,\Delta)$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}1 & \\ & -z\end{bmatrix}$ | 0 | 0 | $m-t'$ | $s-t\geqslant 1$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |

其中$t,t'$满足表8.1中的条件.

**推论8.12** 设$n=2\nu-\delta\geqslant 2$,并且$(m,2s+\tau)$满足(8.1),而$m\neq n$. 那么

$$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_5}X$是$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$的最大元. □

**推论8.13** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 1$,$(m,2s+\tau)$满足(8.1),而$m\neq n$. 如果(8.30)成立或者(8.6)成立而"$\delta=\tau=0$","$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"不出现,那么$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$和所有$(m_1,2s_1+\tau_1)$子空间组成,其中$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(8.25) □

**推论8.14** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 1$,$(m,2s+\tau)$满足(8.1),而$m\neq n$. 当(8.6)成立时,再假定"$\delta=\tau=0$","$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"的各情形均不出现. 如果$P$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$的一个包含在$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$中的真子空间,而$Q$包含在$P$中的子空间,那么$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$.

**证明**　由定理8.11的证明可得该推论的证明. □

## §8.6　格$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$的特征多项式

设$n=2\nu+\delta$，$(m,2s+\tau)$满足(8.1)，而$m\neq n$. 令$N(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)=|\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)|$. 根据有限偏序集的特征多项式(见定义1.10)，可给出格$\mathscr{L}_5=\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$的特征多项式.

**定理8.15**　设$n=2\nu+\delta\geqslant 1$，$(m,2s+\tau)$满足(8.1)，而$m\neq n$. 当(8.6)成立时，再假定"$\delta=\tau=0$"、"$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2$，$\tau=0$"三种情形不出现. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta),t)$$

$$=\sum_{\tau_1=0,1}\left[\sum_{s_1=(s+1)-(1-\tau)\tau_1}^{[n/2]}\sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s-(1-\tau)\tau_1}\sum_{m_1=m-s+s_1+\tau(\tau_1-1)+1}^{l}\right]$$

$$N(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta,\Delta)g_{m_1}(t).\tag{8.55}$$

其中

$$l=\begin{cases}\nu+s_1, & \text{如果 }\tau_1=0\text{ 而 }s_1=0,\\ \nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 }\tau_1=0\text{ 而 }s_1\geqslant 1,\\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 }\tau_1=1.\end{cases}$$

而$g_{m_1}(t)$是Gauss多项式.

**证明**　令$V=\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$，$\mathscr{L}_0=\mathscr{L}(n,\mathbb{F}_q)$. 对于$P\in\mathscr{L}_5=\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$，有

$$\mathscr{L}_5^P=\{Q\in\mathscr{L}_5\,|\,Q\subset P\},$$

由推论8.10，对于$P\in\mathscr{L}_4$，$P\neq V$，那么

$$\mathscr{L}_5^P=\mathscr{L}_0^P$$

按照定理3.11的证明方法，可得到定理8.15的证明. 这里略去其详细过程. □

注意.

$$N(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$$

$$=\begin{cases}N(m,2s,s;2\nu+\delta,\Delta)+N(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta,\Delta),\\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau=0,\\ N(m,2s+1,s,1;2\nu+\delta,\Delta)+N(m,2s+1,s,z;2\nu+\delta,\Delta),\\ \qquad\qquad \text{如果 } \tau=1.\end{cases}$$

其中 $N(m,2s+\tau,s,\Gamma;2\nu+\delta,\Delta)$已在文献[7]中给出，也可参见文献[28]和[32].

作为定理8.15的特殊情形，有如下的结果.

**推论8.16** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(n-1,n-1;2\nu+\delta,\Delta),t)$$

$$=\sum_{s_1=0}^{\nu}N(\nu+s_1+\delta,2s_1+\delta;2\nu+\delta,\Delta)(t-1)(t-q)\cdots(t-q^{\nu+s_1+\delta-1})$$

$$=g_{n-\nu}(t)\gamma(t).$$

其中 $\gamma(t)\in\mathbb{Z}[t]$是次数为 $\nu$ 的首1多项式，而 $g_{n-\nu}(t)$是 Gauss 多项式.

**证明** 易知$(n-1,n-1)$满足(8.1). 而在(8.6)成立时，"$\delta=\tau=0$"，"$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"三种情形不出现. 在定理8.15中，令 $m=n-1$，$2s+\tau=n-1$，就可从(8.55)直接得到推论8.16. □

## §8.7 注记

本章是根据参考文献[15]编写的. 其中的所有引理，定理1，定理8.15，推论8.12—8.14和推论8.16都取自该文. 而定理8.9的充分性和定理8.11分别由文献[15]的定理9和定理11改写得到. 推论8.16是 Orlik-Solomon 的结果.

本章的主要参考资料有：参考文献[15]，[21]，[28]和[32].

# 第九章　有限偶特征正交几何中由相同维数和秩的子空间生成的格

## §9.1　偶特征正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下由相同维数和秩的子空间生成的格

本章采用第六章的符号和术语，是以第六章的内容为基础进行讨论的.

设 $P$ 是正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的一个 $m$ 维子空间，$P$ 的矩阵表示仍记作 $P$. 如果矩阵 $PG_{2\nu+\delta}{}^tP$ 合同于 $M(m,2s_1+\gamma,s_1)$，其中 $\gamma=0$，1，2 和 $0\leqslant s_1\leqslant[(m-\gamma)/2]$，并且记 $2s_1+\gamma=2s+\tau$，其中 $\tau=0$ 或 1，而

$$s=\begin{cases}s_1, & \text{如果 } \gamma=0 \text{ 或 } 1,\\ s_1+1, & \text{如果 } \gamma=2,\end{cases}$$

那么称 $2s+\tau$ **为子空间 $P$ 的秩**. 显然，$m$ 维子空间的秩是正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的不变量.

**定义9.1**　在 $2\nu+\delta$ 维正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中，一个秩为 $2s+\tau$ 的 $m$ 维子空间称**为 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 的 $(m,2s+\tau)$ 子空间**.

如果正交空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和正则矩阵 $G_{2\nu+\delta}$ 从上下文看出时，就简单地称 $P$ 是 $(m,2s+\tau)$ 子空间.

我们用 $\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 表示 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 的所有 $(m,2s+\tau)$ 子空间所成的集合，再用 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 表示 $\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 生成的格，即由 $\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 中子空间交所成的集合，并约定 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中子空间空集的交是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 本身. 通过 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中子空间的反包含关系来规定 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta,\Delta)$ 中元素的序，那么 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 是一个有限格.

**定义9.2**　由 $\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 生成的格 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu$

$+\delta)$称为由**维数** $m$ **和秩** $2s+\tau$ **的子空间生成的格.**

有时为了书写方便，记 $\mathscr{M}_6=\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$，$\mathscr{L}_6=\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$.

## §9.2 $(m,\ 2s+\tau)$ 子空间存在的条件

从定理 6.1 可以得到

**定理9.1** $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $G_{2\nu+\delta}$ 存在 $(m,2s+\tau)$ 子空间当且仅当

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s=0,\\ \nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1.\end{cases}\tag{9.1}$$

**证明** 采用定理 8.1 的证明中的步骤和方法可得到定理 9.1 的证明，这里略去其详细过程. □

由 $(m,2s+\tau)$ 子空间和 $(m,2s+\gamma,s,\Gamma)$ 型子空间的定义，容易得到

$$\mathscr{M}(m,2s;2\nu+\delta)=\mathscr{M}(m,2s,s;2\nu+\delta)\cup\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta)$$

$$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+\delta)=\begin{cases}\mathscr{M}(m,2s+1,s;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta\neq 1,\\ \bigcup\limits_{\Gamma=0,1}\mathscr{M}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta=1.\end{cases}$$

因而

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu+\delta)\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1;2\nu+\delta),$$

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)=\mathscr{L}(m,2s+1,s;2\nu+\delta),\text{如果 } \delta\neq 1,$$

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)\supset\bigcup_{\Gamma=0,1}\mathscr{L}(m,2s+1,s,\Gamma;2\nu+\delta),\quad\text{如果 } \delta=1.$$

由推论 2.9 可得

**定理9.2** 设$n=2\nu+\delta$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\tau)$满足(9.1)

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \tau=0, s=0,\\ \nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0, \text{而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1.\end{cases}$$

那么$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$是一个有限原子格，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$和$\bigcap_{X\in\mathscr{M}_\delta}X$分别是它的最小元和最大元，而$\mathscr{M}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$是它的原子集合.

## §9.3 若干引理

**引理9.3** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant1$,并且$(m,2s+\tau)$满足(9.1),那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s+\tau;2\nu+\delta),$$

除非

$$2s+\tau\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0, \text{而 } s\geqslant1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases}\tag{9.2}$$

成立时,“$\delta=\tau=0,s\geqslant1$”,“$\delta=\tau=1$”和“$\delta=2,\tau=0,s\geqslant1$”三种情形之一出现.

**证明** 我们稍微修改一下引理8.3的证明,就可得到引理9.3的证明，其主要修改的工作是在(b)中$\tau=\delta=1$时边界$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$的情形.在这种情形,$P$是$(m-1,2s+1,s,0)$型子空间.由定理9.1,$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中不存在$(m,2s+1,s,0)$型子空间，因而$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$.因为$e_{2\nu+1}\notin P$,而$\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$中的每个子空间都包含$e_{2\nu+1}$，所以$P\notin\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$,因此$P\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.这正是我们所要排除的第二种情形. □

**引理9.4** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant1,s\geqslant1$,并且$(m,2s+\tau)$满足(9.1)，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\tau,2\nu+\delta).$$

**证明** 我们可以稍微修改引理 8.4 的证明，得到本引理的证明，这里略去其详细过程. □

**引理9.5** 设 $n-2\nu+\delta>m\geqslant 1$，$(m,2s+\tau)$ 满足(8.1)，而 $\tau=1$. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu-\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+\delta),$$

除非

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+\min\{1,\delta\}$$

成立时，"$\delta=0,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$"，"$\delta=1$"和"$\delta=2,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2,s\geqslant 1$"三种情形之一出现.

**证明** 对于 $(m,2s+1)$，(9.1)变成

$$2s+1\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \delta=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } \delta=1 \text{ 或 } 2,\end{cases}\tag{9.3}$$

对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s;2\nu+\delta)$，那么 $P$ 是 $(m-1,2s,s)$ 型子空间，或是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间，我们分以下两种情形：

(a) $P$ 是 $(m-1,2s,s)$ 型子空间. 再分 $\delta=0,1$ 或 2 三种情形.

(a.1) $\delta=2$. 根据定理 6.1，从(9.3)可知，在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中存在 $(m,2s+1,s)$ 型子空间，再由引理 6.9，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,2\nu+2)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$.

下面假设 $\delta=0$ 或 1，不妨设

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s-1$. 令 $\sigma_2=\nu+s-m+1$. 从(9.3)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$，根据引理 6.3，存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记作 $P$，$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}\tag{9.4}$$

是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}G_{2\nu+\delta}{}^t\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I^{(s)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \Delta\end{bmatrix}$$

(a.2) $\delta=0$，我们又分以下两种情形：

(a.2.1) 条件

$$2s+1\leqslant m<\nu+s$$

成立. 这时 $\sigma_2>1$. 令 $y_i$ 和 $y_{\sigma_2+i}(i=1,2)$ 分别是 $Y$ 的第 $i$ 行和第 $\sigma_2+i$ 行，那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_1+y_{\sigma_2+1}\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_2+y_{\sigma_2+2}\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间. 并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$.

(a.2.2) 条件

$$2s+1\leqslant m=\nu+s$$

成立. 这时 $\sigma_2=1$. 设 $y_1$ 和 $y_2$ 分别是 $Y$ 的第 1 和第 2 行，如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$，那么存在一个元素 $\beta\in\mathbb{F}_q^*$，使得 $\beta\neq1$. 因而

$$\begin{bmatrix}P\\y_1+y_2\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_1+\beta y_2\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$.

然而，如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 那么 $Y$ 中仅有一个非奇异向量 $y_1+y_2$，于是

$$\begin{bmatrix}P\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的$(m,2s+1)$子空间，因此 $P\notin\mathscr{L}(m,2s+1,2\nu)$. 这正是我们所要排除的第一种情形.

(a.3) $\delta=1$，我们又分以下两种情形.

(a.3.1) 条件

$$2s+1\leqslant m<\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2\geqslant1$. 设 $y_i(i=1,2,\cdots,2\sigma_2+1)$是 $Y$ 的第 $i$ 行. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_1+y_{2\sigma_2-1}\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_2+y_{2\sigma_2+1}\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

(a.3.2) 条件

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2=0$，因而 $Y$ 是一个行向量. 显然

$$\begin{bmatrix}P\\Y\end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的$(m,2s+1)$子空间. 因此 $P\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$. 这正是我们所排除的第二种情形.

(b) $P$ 是$(m-1,2(s-1)+2,s-1)$型子空间，在这种情形，必有 $s\geqslant1$，再分 $\delta=0,1$ 或 2 三种情形.

(b.1) $\delta=0$，由定理 6.1，从(9.3)得到$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中存在$(m,2s+1,s)$型子空间，再根据引理 6.12，$P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s;2\nu)$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$.

下面假定 $\delta=1$ 或 2，不妨假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0&I^{(s-1)}&&&\\&0&&&\\&&\alpha&1&\\&&&\alpha&\\&&&&0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s-1$，令 $\sigma_2=\nu+s-m+1$，那么从(9.3)得到 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$. 由引理6.3. 存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记作 $P$，$\sigma_1\times(2\nu+\delta)X$ 和 $(2\sigma_2+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(9.4)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}G_{2\nu+\delta}{}^t\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-1)} &&&&&&&&\\ & 0 &&&&&&&&\\ && \alpha & 1 &&&&&&\\ &&& \alpha &&&&&&\\ &&&& 0 & I^{(\sigma_1)} &&&&\\ &&&&& 0 &&&&\\ &&&&&& 0 & I^{(\sigma_2)} &&\\ &&&&&&& 0 &&\\ &&&&&&&& \Sigma_1\end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\delta\times\delta$ 正则矩阵，其定号部分的级数是 $|\delta-2|$.

(b.2)　$\delta=2$. 这时可以假定

$$\Sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix}.$$

又分以下两种情形.

(b.2.1) 条件

$$2s+1\leqslant m<\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2\geqslant 1$. 令 $y_i(i=1,2,\cdots 2\sigma_2+2)$ 是 $Y$ 的第 $i$ 行. 那么

$$\begin{bmatrix}P\\y_1+y_{\sigma_2+1}\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}P\\y_{2\sigma_2+1}+y_{2\sigma_2+2}\end{bmatrix}$$

是一对 $(m,2s+1)$ 子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$.

(b.2.2) 条件

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2=0$. 类似于情形(a.2.2)，我们可以证明：如果 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$，那么 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$；如果 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$，那么 $P\notin\mathscr{L}(m,$

$2s+1;2\nu+2)$. 而"$\delta=2, s\geqslant 1, 2s+1\leqslant m=\nu+s+1$ 和 $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$"的情形，正是我们所要排除的第二种情形.

(b.3) $\delta=1$. 我们又分以下两种情形

(b.3.1) 条件

$$2s+1\leqslant m<\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2\geqslant 1$，因为

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

"合同"，类似于情形(a.3.1)，可以得出 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

(b.3.2) 条件

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

成立. 这时 $\sigma_2=0$，因而 $Y$ 是一个行向量，类似于情形(a.3.2)，可以得到 $P\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$. 这正是我们所要排除的第二种情形. □

**引理9.6** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 2$，并且 $(m,2s+\tau)$ 满足(9.1)，而 $\tau=1$，那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-2,2s;2\nu+\delta),$$

除非

$$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

和 $\delta=1$ 同时成立.

**证明** 我们只需证明

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)\supset\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+\delta)$$

除非 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$ 和 $\delta=1$ 同时成立. 如果 $m-2<2s$，那么

$$\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+\delta)=\phi\subset\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta).$$

现在设 $m-2\geqslant 2s$. 对于任意 $P\in\mathscr{M}(m-2,2s;2\nu+\delta)$，那么 $P$ 是 $(m-2,2s,s)$ 型，或是 $(m-2,2(s-1)+2,s-1)$ 型子空间，我们分以下两种情形

(a) $P$ 是 $(m-2,2s,s)$ 型子空间，不妨设

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 = m-2s-2$. 因为 $m-2 \geqslant 2s$，所以 $\sigma_1 \geqslant 0$. 令 $\sigma_2 = \nu+s-m+2$. 从(9.1)得到

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 2, \text{如果 } \delta = 0, \\ 1, \text{如果 } \delta = 1 \text{ 或 } 2. \end{cases}$$

根据引理 6.3，存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记作 $P$，$\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+\delta) \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(9.4)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \Sigma_1 \end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma_1$ 是 $\delta \times \delta$ 定号矩阵. 令 $y_i$ 是 $Y$ 的第 $i$ 行($i=1,\cdots,2\sigma_2+\delta$). 再分 $\delta=0,1$ 和 2 三种情形.

(a.1) $\delta=0$. 这时 $\sigma_2 \geqslant 2$，因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2 + y_{\sigma_2+2} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \\ y_1 + y_{\sigma_2+1} \end{bmatrix}$$

是一对$(m, 2s+1)$子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P \in \mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu)$.

(a.2) $\delta=2$，这时 $\sigma_2 \geqslant 1$，因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_{2\sigma_2+1} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_{\sigma_2+1} \\ y_{2\sigma_2+2} \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;\ 2\nu+2)$.

(a.3) $\delta=1$，我们又分以下两种情形.

(a.3.1) 条件

$$2s+1\leqslant m<\nu+s+1 \tag{9.5}$$

成立. 这时$\sigma_2\geqslant 2$，按照(a.1)的步骤进行，得到$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;\ 2\nu+1)$.

(a.3.2) 条件

$$2s+1\leqslant m=\nu+s-1 \tag{9.6}$$

成立，那么$\sigma_2=1$，$\dim Y=3$，注意到$e_{2\nu+1}G_{2\nu+1}{}^te_{2\nu+1}=1$，所以$e_{2\nu+1}\in Y$. 设$Q$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中包含$P$的$m$维子空间，可以假定$Q$具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix},$$

其中$x_1,x_2\in Y$和$y_1,y_2\in Y$. 如果$\sigma_1=0$，那么$x_1=x_2=0$，现在假设$\sigma_1\geqslant 1$，记

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s \\ m-2s-2 \end{matrix}$$

那么

$$QG_{2\nu+1}{}^tQ$$

$$\equiv\begin{bmatrix} 0 & I^{(s)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0 \quad P_2\ (G_{2\nu+1}+{}^tG_{2\nu+1})\ {}^t\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \\ & & 0 & \\ & & & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}G_{2\nu+1}{}^t\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

现在假设$Q$是$(m,2s+1)$子空间，那么

$$P_2(G_{2\nu+1}+{}^tG_{2\nu+1})^t\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0, \qquad (9.7)$$

并且

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}G_{2\nu+1}{}^t\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \qquad (9.8)$$

的秩是 1. 因为 $P_2(G_{2\nu+\delta}+{}^tG_{2\nu+\delta})^tX=I^{(\sigma_1)}$，所以从(9.7)得到 $x_1=x_2=0$. 因而包含 $P$ 的任一个子空间 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix}P\\y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

其中 $y_1,y_2\in Y$，而(9.8)的秩是 1. 于是

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

是 $Y$ 的(2,1)子空间. 容易看到：$\mathbb{F}_q^{(3)}$ 中关于

$$\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}$$

的任一个(2,1)子空间包含 $e_3$. 因而 $Y$ 中关于 $G_{2\nu+1}$ 的任一个(2,1)子空间包含 $e_{2\nu+1}$. 因此 $P$ 不是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中 $(m, 2s+1)$ 子空间的交，也即，$P\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

(b) $P$ 是$(m-2,2(s-1)+2,s-1)$型子空间. 不妨设

$$PG_{2\nu+\delta}{}^tP\equiv\begin{bmatrix}0&I^{(s-1)}&&&\\&0&&&\\&&\alpha&1&\\&&&\alpha&\\&&&&0^{(\sigma_1)}\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s-2$，因为 $m-2\geqslant 2s$，所以 $\sigma_1\geqslant 0$. 令 $\sigma_2=\nu+s-m+$

1，从(9.1)得到

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 1, \text{如果 } \delta = 0, \\ 0, \text{如果 } \delta = 1 \text{ 或 } 2. \end{cases}$$

由引理 6.3，存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记为 $P$，$\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+2+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+1} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & \alpha & 1 & & & & & \\ & & & \alpha & & & & & \\ & & & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(2)} \\ & 0 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

令 $y_i(i=1,2,\cdots,2\sigma_2+2+\delta)$是 $Y$ 的第 $i$ 行，再分 $\delta=0$，1 和 2 三种情形

(b.1) $\delta=0$. 在这种情形. $\sigma_2\geqslant1$，因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_{2\sigma_2+1} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_2 \\ y_{2\sigma_2+2} \end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是$P$，所以$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu)$.

(b.2) $\delta=2$. 在这种情形

$$\begin{bmatrix} P \\ y_{2\sigma_2+1} \\ y_{2\sigma_2-2}+y_{2\sigma_2+4} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_{2\sigma_2-2} \\ y_{2\sigma_2+1}+y_{2\sigma_2+3} \end{bmatrix}$$

是$(m,2s+1)$子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$.

(b.3) $\delta=1$ 按照(a.3)的步骤进行，可以得到：如果(9.5)成立，那么$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$；如果(9.6)成立，那么$P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

**引理9.7** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，$s\geqslant 1$，并且$(m,2s)$满足(9.1)，那么

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)$$

$$\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1;2\nu+\delta), & \text{如果 }\delta=0\text{ 或 }2.\\ \mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+\delta), & \text{如果 }\delta=1.\end{cases}$$

除非

$$2s\leqslant m=\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 }\delta=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 }\delta=2.\end{cases}$$

**证明** 由题设$s\geqslant 1$，所以对于$(m,2s)$，(9.1)变成

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 }\delta=0\text{ 或 }1,\\ \nu+s+1, & \text{如果 }\delta=2.\end{cases}\tag{9.9}$$

当$\delta\neq 1$时，$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1,s-1;2\nu+\delta)$是$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1;2\nu+\delta)$的原子集合，而在$\delta=1$时，$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1)$是$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1)$的原子集合，于是只需证明

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)\supset\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1,\\ s-1,\Gamma;2\nu+\delta)\text{，其中 }\Gamma\neq 1.$$

设$P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1,s-1,\Gamma;2\nu+\delta)$，其中$\Gamma\neq 1$. 不

妨假定

$$PG_{2\nu+\delta}{}^{t}P \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(\sigma_1)} & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m-2s\geqslant 0$. 令 $\sigma_2=\nu+s-m$,那么从(9.9)得到

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 0, & \text{如果 } \delta = 0 \text{ 或 } 1, \\ -1, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

由引理 6.3，存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记为 $P$,$\sigma_1\times(2\nu+\delta)$矩阵 $X$ 和$(2\sigma_2+1+\delta)\times(2\nu+\delta)$矩阵 $Y$，使得(9.4)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^{t}\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & & \alpha & & 1 & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & \alpha \end{bmatrix}, \\ \text{如果 } \delta = 2, \text{而 } \nu + s - m + 1 = 0, & (9.10) \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & \Sigma_3 \end{bmatrix}, \\ \text{如果 } \delta \neq 2 \text{ 或 } \nu + s - m + 1 > 0, & (9.11) \end{cases}$$

其中

$$\Sigma_3=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & I^{(\sigma_2)}\\ & 0\end{bmatrix}, & 如果\ \delta=0,\\ \begin{bmatrix}0 & I^{(\sigma_2)} & \\ & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix}, & 如果\ \delta=1,\\ \begin{bmatrix}0 & I^{(\sigma_2)} & & \\ & 0 & & \\ & & \alpha & 1\\ & & & \alpha\end{bmatrix}, & 如果\ \delta=2\ 而\ \nu+s-m+1>0.\end{cases}$$

令 $y_i$ 是 $Y$ 的第 $i$ 行($i=1,2,\cdots,2\sigma_2+1+\delta$)，我们分以下两种情形.

(a) 条件

$$2s\leqslant m<\begin{cases}\nu+s, & 如果\ \delta=0\ 或\ 1,\\ \nu+s+1, & 如果\ \delta=2\end{cases}$$

成立. 当 $\delta=0$ 或 1 时，有 $\sigma_2\geqslant 1$,并且(9.11)成立. 所以

$$\begin{bmatrix}P\\ y_1\end{bmatrix}和\begin{bmatrix}P\\ y_1+y_2\end{bmatrix}$$

是一对$(m,2s)$子空间,并且它们的交是$P$.因此$P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)$. 而在 $\delta=2$ 时,有 $\sigma_2\geqslant 0$,因而 $\nu+s-m+1>0$ 和(9.11)出现,于是

$$\begin{bmatrix}P\\ y_1\end{bmatrix}和\begin{bmatrix}P\\ y_1+y_{2\sigma_2+2}\end{bmatrix}$$

是$(m,2s)$子空间，并且它们的交是$P$. 因此$P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)$.

(b) 条件

$$2s\leqslant m=\begin{cases}\nu+s, & 如果\ \delta=0\ 或\ 1,\\ \nu+s+1, & 如果\ \delta=2\end{cases}$$

成立. 再分 $\delta=0,1$ 和 2 三种情形.

(b. 1) $\delta=0$. 这时 $\sigma_2=0$ 和 $\dim Y=1$. 令 $Q$ 是包含 $P$ 的 $m$ 维子空间，那么 $Q$ 有如下形式的矩阵表示

$$Q=\begin{bmatrix} P \\ x+Y \end{bmatrix},$$

其中 $x\in X$. 记

$$P=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2s-2 \\ m-2s, \\ 1 \end{matrix}$$

那么

$$\begin{bmatrix} P \\ x+Y \end{bmatrix} G_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ x+Y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0^{(m-s)} & 0 & P_2(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}){}^tx \\ & & & 1 & P_3(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}){}^tY \\ & & & & YG_{2\nu}{}^tY \end{bmatrix}.$$

如果 $Q$ 是一个 $(m,2s)$ 子空间，那么 $P_2(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}){}^tx=0$. 由此可得 $x=0$. 所以

$$\begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

是唯一包含 $P$ 的 $(m,2s)$ 子空间. 因此 $P\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu)$. 于是在 $\delta=0$ 和 $2s\leqslant m=\nu+s$ 同时成立时，该引理的结论应除外.

(b. 2) $\delta=1$. 这时 $\sigma_2=0$ 和 $\dim Y=2$ 成立. 因而

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

是 $(m,2s)$ 子空间，并且它们的交是 $P$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)$.

(b. 3) $\delta=2$. 这时 $\sigma_2=-1$ 和 $\dim Y=1$，因而(9.10)成立. 类似于情形(b.1)，可以证明 $P\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 于是在 $\delta=2$ 和 $2s\leqslant m=\nu+s+1$ 同时成立时，该引理的结论也除外.

**引理9.8** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 2$, $s\geqslant 1$，并且 $(m,2s)$ 满足(9.1).

那么

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)$$

$$\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta=0 \text{ 或 } 2,\\ \mathscr{L}(m-2,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta=1.\end{cases}$$

(9.12)

**证明** 如果$\delta=1$，那么由引理 9.3，有

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+1).$$

如果$(m-1,2s)$不满足(9.1)，那么$m-1<2s$，因而$(m-2,2(s-1)+1)$不满足(9.1). 由定理 9.1，$\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+1)=\phi$，显然，(9.12)成立. 然而，如果$(m-1,2s)$满足(9.1)，那么由引理 9.7

$$\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m-2,2(s-1)+1,\\ s-1,0;2\nu+1).$$

因此(9.12)也成立.

现在考虑$\delta=0$或 2. 如果$(m-2,2(s-1)+1)$不满足(9.1)，那么$\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta)=\phi$，因而(9.12)成立. 现在设$(m-2,2(s-1)+1)$满足(9.1)，也即

$$2s-1\leqslant m-2\leqslant\begin{cases}\nu-s-1, & \text{如果 } \delta=0.\\ \nu-s+1, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases}\tag{9.13}$$

但是$(m,2s)$也满足(9.1)，也即

$$2s\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & \text{如果 } \delta=0,\\ \nu+s-1, & \text{如果 } \delta=2.\end{cases}\tag{9.14}$$

设$P\in\mathscr{M}(m-2,2(s-1)+1;2\nu+\delta)$，那么$P$是$(m-2,2(s-1)+1,s-1)$型子空间. 我们可假定

$$PG_{2\nu-\delta}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s-1)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(\sigma_1)} & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

其中$\sigma_1=m-2s-1$. 令$\sigma_2=\nu+s-m+1$. 由(9.13)有$\sigma_1\geqslant 0$；而由

(9.14)有

$$\sigma_2 \geqslant \begin{cases} 1, \text{如果 } \delta = 0, \\ 0, \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

所以根据引理 6.3，存在 $P$ 的一个适当矩阵表示，仍记为 $P$，$\sigma_1 \times (2\nu+\delta)$ 矩阵 $X$ 和 $(2\sigma_2+1+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 矩阵 $Y$，使得(9.4)是非奇异的，并且

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu+\delta} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & I^{(s-1)} & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \Sigma_4 \end{bmatrix},$$

其中

$$\Sigma_4 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2)} \\ & 0 \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & I^{(\sigma_2)} & & \\ & 0 & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

(注意：如果 $\delta=2$，从(9.14)得到 $\nu+s-m+1\geqslant 0$，所以 $\delta=2$ 和 $\nu+s-1-(m-2)+1=0$ 不会出现.）令 $y_i$ 是 $Y$ 的第 $i$ 行，$i=1,2,\cdots,2\sigma_2+1+\delta$. 我们分 $\sigma_2\geqslant 1$ 和 $\sigma_2=0$ 两种情形.

(a) $\sigma_2\geqslant 1$. 这时

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ y_1 \\ y_{\sigma_2+2} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P \\ y_1 + y_2 \\ y_1 + y_{\sigma_2+2} \end{bmatrix}$$

都是 $(m,2s)$ 子空间，并且它们的交是 $P$. 因此(9.12)成立.

(b) $\sigma_2=0$. 在这种情形，必有 $\delta=2$. 如果 $\alpha\neq1$，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} P \\ y_1+\alpha^{1/2}y_2+\alpha^{1/2}y_3 \\ y_1+\alpha^{1/2}y_2+\alpha^{-1/2}y_3 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y_1+\alpha^{1/2}y_2+\alpha^{1/2}y_3 \\ y_1+\alpha^{-1/2}y_2+\alpha^{1/2}y_3 \end{bmatrix}$$

都是$(m,2s)$子空间，并且它们的交是 $P$. 如果 $\alpha=1$，那么

$$\begin{bmatrix} P \\ y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} P \\ y_1+y_2 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix} P \\ y_1+y_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}$$

都是$(m,2s)$子空间，并且它们的交是 $P$. 因此(9.12)也成立. □

## §9.4 格 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$之间的包含关系

**定理9.9** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant1$，$(m,2s+\tau)$满足(9.1)

$$2s+\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s, & 如果\ \tau=0\ 而\ s=0, \\ \nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & 如果\ \tau=0\ 而\ s\geqslant1, \\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & 如果\ \tau=1\end{cases}$$

和 $m\neq n$. 当 $\delta\neq1$ 或 $\tau_1-\tau\leqslant0$ 时，$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.1)

$$2s_1+\tau_1\leqslant m_1$$

$$\leqslant\begin{cases}\nu+s_1, & 如果\ \tau_1=0\ 而\ s_1=0, \\ \nu+s_1+\max\ \{0,\ \delta-1\}, & 如果\ \tau_1=0\ 而\ s_1\geqslant1, \\ \nu+s_1+\min\ \{1,\ \delta\}, & 如果\ \tau_1=1,\end{cases}$$

而在 $\delta=1$ 和 $\tau_1-\tau=1$ 时，$(m_1,2s_1+1,s_1,0)$满足

$$2s_1+1\leqslant m_1\leqslant\nu+s_1.$$

并且在(9.2)

$$2s+\tau\leqslant m=\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & 如果\ \tau=0\ 而\ s\geqslant1, \\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & 如果\ \tau=1\end{cases}$$

成立时，表 9.1 所列的各种情形不出现. 那么

$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$

$$\supset \begin{cases} \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\tau_1; 2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta \neq 1 \text{ 或 } \tau_1 - \tau \leqslant 0, \\ \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1, 0; 2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta = 1 \text{ 而 } \tau_1 - \tau = 1 \end{cases} \tag{9.15}$$

的充分必要条件是

$$2m - 2m_1 \geqslant (2s + \tau) - (2s_1 + \tau_1) \geqslant 0. \tag{9.16}$$

表 9.1

| $\delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $\mathbb{F}_q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 0 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 0 | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 0 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_2$ |
| 1 | 1 | 0 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 1 | 1 | 1 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ |
| 2 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_2$ |

其中 $t'$ 是满足 $1\leqslant t'\leqslant m-t$ 的整数.

**证明** 先证明充分性. 由(9.16)可以假定

$$(2s + \tau) - (2s_1 + \tau_1) = 2t + l \tag{9.17}$$

和

$$m - m_1 = t + t'. \tag{9.18}$$

其中 $t$, $t'\geqslant 0$, 而

$$l = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \tau = \tau_1, \\ 1, & \text{如果 } |\tau - \tau_1| = 1. \end{cases}$$

从(9.16),(9.17)和(9.18)得到 $2t'\geqslant l$.

因为 $(m, 2s+\tau)$ 满足(9.1),所以对于 $1\leqslant i\leqslant t$, $(m-i, 2(s-i)+\tau)$ 也满足(9.1). 因而可以应用引理 9.4, 得到

$\mathscr{L}(m, 2s + \tau; 2\nu + \delta) \supset \mathscr{L}(m - 1, 2(s - 1) + \tau;$

$2\nu+\delta)\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\tau;2\nu+\delta)$. (9.19)

我们分 $l=0$ 和 $l=1$ 两种情形.

(a) $l=0$. 这时有 $\tau_1=\tau, s-s_1=t$. 按照定理 8.9 证明中情形(a)所给出的方法，同样可得：如果 $t'=0$，那么 (9.15) 成立；如果 $t'>0$，易知，当 $(m, 2s+\tau)$ 满足(9.2)，而 $\tau=\tau_1=0$，并且在 $t\geqslant1$ 和 $t'\geqslant2$ 时，那么(9.15)成立；而在 $(m, 2s+\tau)$ 满足(9.1)又不满足(9.2)时，由引理 9.3，那么(9.15)也成立. 因此在情形(a)，总有(9.15)成立，除非(9.2)成立时，列在表 9.1 中"$\delta=\tau=\tau_1=0$，$s_1\geqslant1$"，"$\delta=\tau=\tau_1=1, t'\geqslant1$"和"$\delta=2, \tau=\tau_1=0, s_1\geqslant1$"情形出现，即定理的充分性成立.

(b) $l=1$. 因为 $2t'\geqslant l$，所以 $t'>0$. 从 $l=1$ 得到 $|\tau-\tau_1|=1$. 再分"$\tau=1, \tau_1=0$"和"$\tau=0, \tau_1=1$"两种情形.

(b.1) $\tau=1, \tau_1=0$. 由(9.17)有 $s-s_1=t$. 所以

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+1;2\nu+\delta)$$
$$=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+1;2\nu+\delta). \tag{9.20}$$

又分以下两种情形.

(b.1.1) $t'=1$，先断言：在题设(9.1)，$l=1, \tau=1, \tau_1=0$ 和 $t'=1$ 的条件下，

$$2s_1+1\leqslant m_1+1=\nu+s_1+\min\{1,\delta\} \tag{9.21}$$

和(9.2)等价. 事实上，如果(9.21)成立，那么从(9.18)，(9.21)，$t'=1$ 和 $s-s_1=t$ 得到

$$m=m_1+t+t'=m_1+t+1$$
$$=\nu+s_1+\min\{1,\delta\}+t=\nu+s+\min\{1,\delta\}.$$

因为 $(m, 2s+1)$ 满足(9.1)和 $\tau=1$，所以(9.2)成立. 反之假设(9.2)成立，那么

$$2s_1+1=2(s-t)+\tau=2s+\tau-2t\leqslant m-2t$$
$$=m_1-t+t'\leqslant m_1+t'=m_1+1$$

和

$$m_1+1=m_1+t'=m-t=\nu+s+\min\{1,\delta\}-t$$
$$=\nu+s_1+\min\{1,\delta\}.$$

所以(9.21)成立.

现在来讨论

$$\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+\delta). \quad (9.22)$$

根据上述断言，在给定的题设(9.2)成立和“$l=1,\tau=1,\tau_1=0,t'=1$”的条件下，如果表 9.1 的第 4，第 5 和第 10 行所列的情形之一不出现时，那么(9.21)和如下三种情形

$$“\delta=0,\tau=1,\tau_1=0,t'=1,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2”,$$

$$“\delta=1,\tau=1,\tau_1=0,t'=1”,$$

与

$$“\delta=2,\tau=1,\tau_1=0,t'=1,s_1\geqslant1,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2”$$

之一不能同时成立. 因而可以应用引理 9.5，得到(9.22)，除非(9.2)成立时，表 9.1 所列的“$\delta=0,\tau=1,\tau_1=0,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$”，“$\delta=1,\tau=1,\tau_1=0,t'=1$”和“$\delta=2,\tau=1,\tau_1=0,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2,s_1\geqslant1$”三种情形之一出现. 因此在(b.1.1)的情形，该定理的充分性成立.

(b.1.2) $t'\geqslant2$. 由$(m_1,2s_1)$满足(9.1)，可知 $\mathscr{M}(m_1,2s_1;2\nu+\delta)\neq\phi$. 首先考虑 $\delta=0$ 和 $\delta=2$ 的情形. 因为$(m_1+t',2s_1+1)$满足(9.1)，所以对于 $0\leqslant j\leqslant t'-1$，$(m_1+t'-j,2s_1+1)$也满足(9.1). 连续地应用引理 9.3，得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+1;2\nu+\delta)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+1;2\nu+\delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+2,2s_1+1;2\nu+\delta).\end{aligned} \quad (9.23)$$

根据引理 9.6，有

$$\mathscr{L}(m_1+2,2s_1+1;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+\delta). \quad (9.24)$$

从(9.19)，(9.20)，(9.23)和(9.24)得到(9.15).

其次考虑 $\delta=1$ 的情形. 如同在(b.1.1)的情形，在题设(9.1)，$l=1,\tau=1,\tau_1=0$ 和 $t'\geqslant2$ 的条件下，可以证明

$$2s_1+1\leqslant m_1+t'=\nu+s_1+1 \quad (9.25)$$

等价于(9.2). 因而在题设(9.2)成立和“$l=1,\tau=1,\tau_1=0,\delta=1$”的条件下，如果表 9.1 第 5 行所列的情形不出现时，那么(9.25)和

“$\delta=1,\tau=1,\tau_1=0$”不同时出现. 这就可以引用引理 9.6，我们得到

$$\mathscr{L}(m+t',2s_1+1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1;2\nu+1). \tag{9.26}$$

除非 $\delta=1$ 和(9.25)同时成立，如果 $t'=2$，那么从(9.19)，(9.20)，(9.26)和上述结论可得

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+1).$$

如果 $t'>2$，那么应用引理 9.3 得到

$$\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-3,2s_1;2\nu+1)$$
$$\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+1).$$

从(9.19)，(9.20)，(9.26)和上式得到(9.15)，除非 $\delta=1$ 和(9.25)同时成立. 应注意：情形“$\delta=1,\tau=1,\tau_1=0,t'\geqslant2$”已包含在表 9.1 的第 5 行. 因此在(b.1.2)的情形，定理 9.9 的充分性也成立.

(b.2) $\tau=0$，$\tau_1=1$. 从(9.17)得到 $s-s_1=t+1$. 因而

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\tau;2\nu+\delta)$$
$$=\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+\delta). \tag{9.27}$$

我们又分以下两种情形.

(b.2.1) $t'=1$. 如同情形(b.1.1)，在题设(9.1)，$l=1,\tau=0,\tau_1=1$ 和 $t'=1$ 的条件下，可以证明

$$2(s_1+1)\leqslant m_1+1=\begin{cases}\nu+s_1+1,\text{如果 }\delta\neq0,\\ \nu+s_1+2,\text{如果 }\delta=2\end{cases} \tag{9.28}$$

和(9.2)等价. 因而在题设(9.2)成立和“$\tau=0,\tau_1=1,t'=1$”的条件下，如果表(9.1)的第 3 和第 9 行所列的情形不出现时，那么当(9.28)成立时，“$\delta=0,\tau=0,\tau_1=1$”和“$\delta=2,\tau=0,\tau_1=1$”之一不出现. 根据引理 9.7，有

$$\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+\delta)$$
$$\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta), & \text{如果 }\delta=0\text{ 或 }2,\\ \mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+\delta), & \text{如果 }\delta=1.\end{cases}$$

从(9.19)，(9.27)和上述的结论，可知(9.15)成立. 除非(9.2)成立时，表 9.1 所列“$\delta=0,\tau=0,\tau_1=1,t'=1$”和“$\delta=2,\tau=0,\tau_1=1,t'=1$”之一出现. 因此，在(b.2.1)的情形，定理 9.9 的充分性也

成立.

(b.2.2) $t'\geqslant 2$. 首先考虑 $\delta=1$ 的情形. 因为$(m_1+t',2(s_1+1))$满足(9.1)，所以对于$1\leqslant j\leqslant t'-1$, $(m_1+t'-j,2(s_1+1))$也满足(9.1). 连续地应用引理 9.3,得到

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+1)\\
&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2(s_1+1);2\nu+1)\supset\cdots\\
&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+1).
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

再应用引理 9.7，有

$$
\mathscr{L}(m_1+1,2(s_1+1);2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1)
\tag{9.30}
$$

从(9.19),(9.27),(9.29)和(9.30)得到(9.15).

其次考虑 $\delta=0$ 和 $\delta=2$ 的情形，由引理 9.8,有

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu-\delta)\\
&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-2,2s_1+1;2\nu+\delta).
\end{aligned}
\tag{9.31}
$$

如果$t'=2$,那么从(9.19),(9.27)和(9.31)得到(9.15)；如果$t'>2$，那么可以连续地应用引理 9.3,有

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(m+t'-2,2s_1+1;2\nu+\delta)\\
&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-3,2s_1+1;2\nu+\delta)\supset\cdots\\
&\qquad\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+\delta).
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$

从(9.19),(9.27),(9.31)和(9.32)得到(9.15). 因而在(b.2.2)的情形，定理 9.10 的充分性也成立.

再证明必要性. 假设(9.15)成立. 易知，

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)\\
&\supset\begin{cases}
\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta)\supset\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta\neq 1 \text{ 或 } \tau_1-\tau\leqslant 0,\\
\mathscr{L}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0,s_1,0;2\nu+\delta) & \\
\quad\supset\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,0;2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta=1 \text{ 而 } \tau_1-\tau=1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

由$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.1)可知

$$
\mathscr{M}(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta)\neq\phi.
$$

对于

$$Q \in \begin{cases} \mathscr{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1; 2\nu + \delta), & \text{如果 } \delta \neq 1 \text{ 或 } \tau_1 - \tau \leqslant 0, \\ \mathscr{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu + \delta), & \text{如果 } \delta = 1 \text{ 而 } \tau_1 - \tau = 1. \end{cases}$$

那么 $Q$ 是 $\mathscr{M}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta)$ 中子空间的交. 于是存在 $P \in \mathscr{M}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta) \subset \mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta)$ 使得 $Q \subset P$. 平行于定理 8.9 的证明过程, 可知(9.16)成立. □

**定理9.10** 设 $n=2\nu+\delta \geqslant 1$, $(m, 2s+\tau)$ 满足(9.2)和 $m \neq n$, 而 $(m_1, 2s_1+\tau_1)$ 满足(9.1)和(9.16), 并且 $m \neq m_1$. 如果表 9.1 所列的情形之一出现, 而在 $\tau_1 = \tau_1$ 时又假定 $(m_1, 2s_1+\tau_1)$ 不满足(9.2). 那么

$$\mathscr{L}(m, 2s + \tau; 2\nu + \delta) \supsetneqq \mathscr{L}(m_1, 2s_1 + \tau_1; 2\nu + \delta). \tag{9.33}$$

**证明** 类似于定理 8.10 中相应部分的推导, 当表 9.1 所列的每一种情形出现时, 都有

$$\mathscr{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1; 2\nu + \delta) \neq \phi.$$

现在只对表 9.1 的第 6 行, 第 4 行和第 9 行所列的情形分别进行验证. 而其他各行所列的情形可类似地进行.

(a) 第 6 行. 这时 $\delta=\tau=\tau_1=1$, $m_1=m-t-t'$, $s_1=s-t\geqslant 0$. 而 $(m, 2s+1)$ 和 $(m_1, 2s_1+1)$ 所满足的(9.2)和(9.1)分别变成

$$2s + 1 \leqslant m = \nu + s + 1 \tag{9.34}$$

和

$$2s_1 + 1 \leqslant m_1 \leqslant \nu + s_1 + 1.$$

由(9.34)可知, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中不存在任何 $(m, 2s+1, s, 0)$ 型子空间. 所以 $\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1) = \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$. 设 $P \in \mathscr{M}(m_1, 2s_1+1; 2\nu+1)$, 那么 $P$ 是 $(m_1, 2s_1+1, s_1, 0)$ 型, 或是 $(m_1, 2s_1+1, s_1, 1)$ 型子空间. 由 $(m_1, 2s_1+1)$ 不满足(9.2)而满足(9.1), 可以假定 $P$ 是前一种情形. 这时 $P$ 不含 $e_{2\nu+1}$, 而由定理 6.20 可知, $\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$ 中的每个子空间均含有 $e_{2\nu+1}$, 所以 $P \notin \mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)$. 因而(9.33)成立.

(b) 第 4 行. 这时 $\delta=0$, $\tau=1$, $\tau_1=0$, $m_1=m-t-1$, $s_1=s-t$, $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 而 $(m, 2s+1)$ 和 $(m_1, 2s_1)$ 分别满足

$$2s + 1 \leqslant m = \nu + s \tag{9.35}$$

和

$$2s_1 \leqslant m_1 \leqslant \nu + s_1. \tag{9.36}$$

设 $P \in \mathscr{M}(m_1, 2s_1; 2\nu)$，那么 $P$ 是 $(m_1, 2s_1, s_1)$ 型子空间，或是 $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1)$ 型子空间，当 $P$ 是前一种情形时，不妨设

$$P G_{2\nu} {}^tP = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & \\ & 0 & \\ & & 0^{(\sigma_1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 = m-2s-t-1$. 令 $\sigma_2 = 2(\nu+s-m+1)$. 由(9.35)和(9.36)可知 $\sigma_1 \geqslant 0, \sigma_2 = 2$. 于是由引理 6.3，存在 $\sigma_1 \times 2\nu$ 矩阵 $X$ 和 $\sigma_2 \times 2\nu$ 矩阵 $Y$. 使得

$$\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} G_{2\nu} {}^t\begin{bmatrix} P \\ X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^{(s_1)} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & I^{(\sigma_1)} & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

假设 $Q$ 是包含 $P$ 的 $m$ 维子空间，那么 $Q$ 具有形式

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_{t+} + y_{t+1} \end{bmatrix}, \tag{9.38}$$

其中 $x_i \in X, y_i \in Y, i = 1, 2, \cdots, t+1$. 令

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2s_1 \\ \sigma_1 \end{matrix}$$

那么 $P_1(G_{2\nu} + {}^tG_{2\nu}){}^tX = 0, P_2(G_{2\nu} + {}^tG_{2\nu}){}^tX = I^{(\sigma_1)}$，并且

$$QG_{2\nu}{}^tQ = \begin{bmatrix} 0 & I^{(t)} & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & P_2(G_{2\nu}+{}^tG_{2\nu}) & {}^t\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} \\ & & & \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{t+1} \end{bmatrix} G_{2\nu} & {}^t\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{t+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{9.39}$$

如果 $Q$ 是 $(m, 2s+1)$ 子空间，那么由(9.37)和(9.39)可知

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = t.$$

我们可设 $x_1, \cdots, x_t$ 线性无关，$x_{t+1}=0$，$y_{t+1}\neq 0$，并且又有 $y_{t+1} G_{2\nu}{}^t y_{t+1}=1$. 即 $y_{t+1}$ 是 $Y$ 中的非奇异向量. 按照引理 9.5 证明中情形(a. 2. 2)，可知 $Y$ 中只存在一个非奇异向量 $y_{t+1}$，所以形如(9.38)的 $Q$ 具有形式

$$\begin{bmatrix} P \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \\ y_{t+1} \end{bmatrix},$$

而上述子空间的交不是 $P$，因此(9.33)成立.

(c) 第 9 行，这时 $\delta=2$，$\tau=0$，$\tau_1=1$，$m_1=m-t-1$，$s_1=s-t-1$，而 $(m, 2s)$ 和 $(m_1, 2s_1+1)$ 分别满足

$$2s \leqslant m = \nu + s + 1 \tag{9.40}$$

和(9.34)

$$2s_1 + 1 \leqslant m_1 \leqslant \nu + s_1 + 1.$$

设 $P\in\mathcal{M}(m_1,2s_1+1;2\nu+2)$，那么 $P$ 是$(m_1,2s_1+1,s_1)$子空间. 不妨设

$$PG_{2\nu+2}{}^tP=\begin{bmatrix}0 & I^{(s_1)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0^{(\sigma_1)} & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1=m_1-2s_1-1=m-2s+t$. 令 $\sigma_2=2(\nu+s-m+1)+1$. 由(9.40)和(9.33)可知 $\sigma_1\geqslant 0$，$\sigma_2=1$. 根据引理 6.3，存在 $\sigma_1\times(2\nu+2)$矩阵 $X$，$1\times(2\nu+2)$矩阵 $Y=(y)$，使得

$$\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}G_{2\nu+2}{}^t\begin{bmatrix}P\\X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I^{(s_1)} & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & I^{(\sigma_1)} & \\ & & & 1 & & 1\\ & & & & 0 & \\ & & & & & \alpha\end{bmatrix}. \tag{9.41}$$

假设 $Q$ 是包含 $P$ 的 $m$ 维子空间，那么 $Q$ 具有形式

$$Q=\begin{bmatrix}P\\x_1+a_1y\\\vdots\\x_{t+1}+a_{t+1}y\end{bmatrix}, \tag{9.42}$$

其中 $x_i\in X$，$y_i\in Y$，$i=1,2,\cdots,t+1$. 令

$$P=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}\begin{matrix}2s_1\\\sigma_1\\1\end{matrix},$$

那么 $\begin{bmatrix}P_1\\P_3\end{bmatrix}(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^tX=0$，$P_2(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^tX=I^{(\sigma_1)}$，

$\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^tY=0$，$P_3(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^tY=1$，$YG_{2\nu+2}{}^tY=\alpha$.

$$QG_{2\nu+2}{}^tQ=\begin{bmatrix} 0 & I^{(\nu_1)} & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & P_3(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^t\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{t+1}\end{bmatrix} \\ & & 1 & P_3(G_{2\nu+2}+{}^tG_{2\nu+2}){}^t\begin{bmatrix}a_1y\\ \vdots\\ a_{t+1}y\end{bmatrix} \\ & & & \begin{bmatrix}a_1y\\ \vdots\\ a_{t+1}y\end{bmatrix}G_{2\nu+2}{}^t\begin{bmatrix}a_1y\\ \vdots\\ a_{t+1}y\end{bmatrix}\end{bmatrix}. \quad (9.43)$$

如果 $Q$ 是$(m,2s)$子空间，那么由(9.41)和(9.43)可设 $x_1$，…，$x_t$ 线性无关，$x_{t+1}=0$，而 $a_1=\cdots=a_t=0$ 和 $a_{t+1}=1$，所以形如(9.42)的 $Q$ 具有形式

$$\begin{bmatrix}P\\ x_1\\ \vdots\\ x_t\\ Y\end{bmatrix}, \quad (9.44)$$

而上述子空间的交不是 $P$，因而(9.33)成立. □

## §9.5 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间在 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 中的条件

**定理9.11** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant1$，$(m,2s+\tau)$满足(9.1)，而 $m\neq n$. 如果

$$2s+\tau\leqslant m<\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases} \quad (9.45)$$

成立，那么

(a) 当 $\delta\neq 1$ 或 $\tau\neq 0$ 时，$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间组成，其中 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(9.16)

$$2m-2m_1\geqslant(2s+\tau)-(2s_1+\tau_1)\geqslant 0;$$

(b) 当 $\delta=1$ 而 $\tau=0$ 时，$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$，$(m_1,2s_1)$ 满足(9.16)的所有 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间和 $(m_1,2s_1+1)$ 满足(9.16)的 $(m_1,2s_1+1,s_1,0)$ 型子空间组成.

然而，如果(9.2)

$$2s-\tau\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau=0 \text{ 而 } s\geqslant 1,\\ \nu+s+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau=1\end{cases}$$

成立，那么

(a) 当 $\delta\neq 1$ 或 $\tau\neq 0$ 时，$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间组成，其中 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(9.16)而不列在表 9.2 中.

**表 9.2**

| $\delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1+\gamma_1,s_1,\Gamma_1)$ 型子空间 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 0 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 0 | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1+1,s_1)$ |
| 0 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_2$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 1 | 1 | 0 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ 或 $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |
| 1 | 1 | 1 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1+1,s_1,0)$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1,s_1)$ |
| 2 | 0 | 1 | $m-t-1$ | $s-t-1\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2s_1+1,s_1)$ |
| 2 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1)$ |

(b) 当 $\delta=1$ 而 $\tau=0$ 时，$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$，$(m_1,2s_1)$

满足(9.16)而又不列在表 9.2 中的所有$(m_1, 2s_1+\tau_1)$子空间和$(m_1, 2s_1+1)$满足(9.16)而又不列在表 9.2 中的所有$(m_1, 2s_1+1, s_1, 0)$型子空间组成.

表 9.3

| $\delta$ | $\tau$ | $\tau_1$ | $m_1$ | $s_1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2s_1+\gamma_1, s_1, \Gamma)$型子空间 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2s_1, s_1)$ |
| 0 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2s_1, s_1)$ |
| 0 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1)$ |
| 1 | 1 | 1 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2s_1+1, s_1, 1)$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1)$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t'$ | $s\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1)$ |
| 2 | 1 | 0 | $m-t-1$ | $s-t\geqslant 1$ | $\mathbb{F}_q$ | $(m_1, 2s_1, s_1)$ |

其中$t'$是满足$1\leqslant t'\leqslant m-t$的整数.

**证明** 由我们的约定,$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\in\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta)$. 假设$(m, 2s+\tau)$满足(9.45). 如果$\delta\neq 1$或$\tau\neq 0$,令$Q$是$(m_1, 2s_1+\tau_1)$子空间,其中$(m_1, 2s_1+\tau_1)$满足(9.16);如果$\delta=1$而$\tau=0$,令$Q$是$(m_1, 2s_1)$子空间,其中$(m_1, 2s_1)$满足(9.16),或是$(m_1, 2s_1+1, s_1, 0)$型子空间而$(m_1, 2s_1+1)$满足(9.16). 由定理 9.9,

$$Q\in\begin{cases}\mathscr{L}(m_1, 2s_1+\tau_1; 2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta), \\ \qquad\qquad\text{如果 }\delta\neq 1\text{ 或 }\tau\neq 0, \\ \mathscr{L}(m_1, 2s_1; 2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta), \\ \qquad\qquad\text{如果 }\delta=1\text{ 而 }\tau=\tau_1=0, \\ \mathscr{L}(m_1, 2s_1+1, s_1, 0; 2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta), \\ \qquad\qquad\text{如果 }\delta=1, \tau=0\text{ 而 }\tau_1=1.\end{cases}$$

反之,设$Q$是一个$(m_1, 2s_1+\tau_1)$子空间,或者在$\delta=1, \tau=0$时,$Q$是$(m_1, 2s_1+1, s_1, 0)$型子空间,并且$Q\in\mathscr{L}(m, 2s+\tau; 2\nu+\delta)$. 那么存在一个$(m, 2s+\tau)$子空间$P$,使得$Q\subset P$. 类似于定理 8.9

必要性的证明，可知(9.16)成立.

现在假设$(m,2s+\tau)$满足(9.2). 令$Q$是$(m_1,2s_1+\tau_1)$子空间，或者$\delta=1,\tau=0$时是$(m_1,2s_1+1,s_1,0)$型子空间，当$(m_1,2s_1+\tau_1)$不列在表9.1中任一情形时，我们用上一段同样的方法，可以证明$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.16)当且仅当$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$. 现在考虑列在表9.1中的各种情形. 对于表9.1中的1，2，4，6，7，8或10行，并且子空间的类型由表9.3给出. 我们可以证明$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.16)当且仅当$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$. 我们取表9.3的第一行作为例子予以证明. 这时$Q$是$(m_1,2s_1,s_1)$型子空间. 由(9.2)可知$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$中不存在$(m,2(s-1)+2,s-1)$型子空间，因而$\mathscr{L}(m,2s;2\nu)=\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$. 根据定理6.15,$Q\in\mathscr{L}(m,2s,s;2\nu)$当且仅当$(m_1,2s_1,s_1)$满足(6.12). 由该式可导出(9.16). 因此$Q\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu)$当且仅当$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.16).

留待我们考虑表9.2所列的每一种情形. 我们可利用证明定理9.9的方法,同样可知在$(m_1,2s_1+\tau_1)$满足(9.16)时,$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$. □

**推论9.12** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 2$，并且$(m,2s+\tau)$满足(9.1)，而$m\neq n$. 那么

$$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta),$$

并且$\{0\}=\bigcap_{X\in\mathscr{M}_6}X$是$\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$的最大元. 除非"$n=2,\nu=1,\delta=0,m=1,s=0,\tau=1,\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$"或"$\delta=1,\tau=1,m=s+t',\nu=t'-1,t'\geqslant 2$"出现.

**证明** 我们把$\{0\}$看作$(m_1,2s_1+\tau_1)$子空间，其中$m_1=s_1=\tau_1=0$. 由定理9.11，有$\{0\}\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$,除非(9.2)成立时，表9.1的第4行或第5行出现.

先考虑(9.2)成立和表9.1第4行出现的情形，这时$\delta=0,\tau=1,\tau_1=0,m_1=m-t-1,s_1=s-t=0$和$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_2$. 所以$s=t,m=s+1$,并(9.2)变成$2s+1\leqslant m=\nu+s$,因而$\nu=1,n=2,s=0$和$m=1$. 这是我们所排除的情形.

再考虑(9.2)成立和表(9.1)第5行出现的情形. 这时有 $\delta=1,\tau=1,\tau_1=0,m_1=m-t-t',s_1=s-t$. 因而 $s=t,m=s+t'$. 而(9.2)变成 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$. 所以 $\nu=t'-1$. 当 $t'=1$ 时, $\nu=0$ 和 $n=1$. 这与 $n\geqslant 2$ 矛盾; 当 $t'\geqslant 2$ 时, 这又是我们排除的情形.

□

平行于推论 8.13 和 8.14, 我们有

**推论9.13** 假设 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$. 令 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$, $(m,\ 2s+\tau)$ 满足(9.1), 而 $m\neq n$. 如果(9.45)成立, 或者(9.2)成立而"$\delta=\tau=0$", "$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"三种情形中任一种不出现, 那么 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和所有 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 子空间组成, 其中 $(m_1,2s_1+\tau_1)$ 满足(9.16). □

**推论9.14** 假设 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$. 令 $n=2\nu-\delta\geqslant 1$, $(m,2s+\tau)$ 满足(9.1), 而 $m\neq n$. 如果(9.2)成立, 再假定"$\delta=\tau=0$", "$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"三种情形中任一种不出现, 如果 $P$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的一个包含在 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 中的子空间, 而 $Q$ 是包含在 $P$ 中的真子空间. 那么 $Q\in\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$. □

## §9.6 格 $\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta)$ 的特征多项式

**定理9.15** 假设 $\mathbb{F}_q\neq\mathbb{F}_2$. 令 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$, 并且 $(m,2s+\tau)$ 满足(9.1)和 $m\neq n$. 当(9.2)成立时, 再假定"$\delta=\tau=0$", "$\delta=\tau=1$"和"$\delta=2,\tau=0$"三种情形中任一种不出现. 那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+\tau;2\nu+\delta),t)$$
$$=\sum_{\tau_1=0,1}\left[\sum_{s_1=(s+1)-(1-\tau)\tau_1}^{[n/2]}\ \sum_{m_1=2s_1+\tau_1}^{l}+\sum_{s_1=0}^{s-(1-\tau)\tau_1}\ \sum_{m_1=m-s+s_1+\tau(\tau_1-1)+1}^{l}\right]$$
$$N(m_1,2s_1+\tau_1;2\nu+\delta)g_{m_1}(t),$$

其中

$$l=\begin{cases}\nu+s_1, & \text{如果 } \tau_1=0 \text{ 而 } s_1=0,\\ \nu+s_1+\max\{0,\delta-1\}, & \text{如果 } \tau_1=0 \text{ 而 } s_1\geqslant 1,\\ \nu+s_1+\min\{1,\delta\}, & \text{如果 } \tau_1=1\end{cases}$$

和 $N(m_1, 2s_1+\tau_1; 2\nu+\delta) = |\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\tau_1; 2\nu+\delta)|$，而 $g_{m_1}(t)$ 是 Gauss 多项式. □

应注意：

$$N(m, 2s; 2\nu+\delta) = N(m, 2s, s; 2\nu+\delta) + N(m, 2(s-1)+2, s-1; 2\nu+\delta),$$

$$N(m, 2s+1; 2\nu+\delta) = \begin{cases} N(m, 2s+1, s; 2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta \neq 1, \\ \sum_{\Gamma=0,1} N(m, 2s+1, s, \Gamma; 2\nu+\delta), & \text{如果 } \delta = 1, \end{cases}$$

其中

$$N(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta) = |\mathscr{M}(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)|.$$

而对于 $N(m, 2s+\gamma, s, \Gamma; 2\nu+\delta)$ 的准确表示式，见文献 [10], [28] 或 [32].

作为定理 9.15 的特殊形式，我们有

**推论9.16** 假设 $\mathbb{F}_q \neq \mathbb{F}_2$，令 $n = 2\nu+1 \geqslant 1$，那么

$$\chi(\mathscr{L}(n-1, n-1; 2\nu+\delta), t) = \sum_{s_1=0}^{\nu} N(\nu+s_1+\delta, 2s_1+\delta; 2\nu+\delta) g_{\nu+s_1-\delta}(t) = g_{n-\nu}(t)\gamma(t),$$

其中 $\gamma(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 是次数为 $\nu$ 的首一多项式，而 $g_{\nu+s_1-\delta}(t)$ 和 $g_{n-\nu}(t)$ 是 Gauss 多项式. □

## §9.7 注记

本章是根据参考文献[16]编写的，其中的所有引理，定理 9.15，推论 9.13—9.14 和推论 9.16 都取自该文. 而定理 9.9，定理 9.11 和推论 9.12 分别由文献[16]的定理 9，定理 11 和推论 10 改写得到. 推论 9.16 是参考文献[5]的结果.

本章的主要参考资料有：参考文献[16]，[5]，[28]和[32].

# 第十章　有限伪辛几何中由相同维数和秩的子空间生成的格

在这一章中，我们完全采用第七章的术语和符号，以第七章的内容为基础，继续进行讨论.

## § 10.1　伪辛群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下由相同维数和秩的子空间生成的格

设 $P$ 是 $2\nu+\delta$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的一个 $m$ 维子空间，矩阵 $PS_\delta{}^tP$ 的秩称为 $P$ **关于** $S_\delta$ **的秩**，简单说成 $P$ 的秩. 显然子空间 $P$ 的秩是在 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的一个不变量. 我们把 $m$ 维子空间 $P$ 的秩记成 $2s+\gamma$，其中 $\gamma=0$ 或 1. 所以 $0\leqslant 2s+\gamma\leqslant m$.

**定义10.1**　$2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中一个维数是 $m$ 而秩为 $2s+\gamma$ 的子空间 $P$，叫做 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ **中关于** $S_\delta$ **的** $(m, 2s+\gamma)$ **子空间**.

如果 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和 $S_\delta$ 能从上下文看出时，又简单说 $P$ 是 $(m, 2s+\gamma)$ 子空间. 我们用 $\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 表示 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中关于 $S_\delta$ 的全体 $(m, 2s+\gamma)$ 子空间所成的集合，再用 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 表示由 $\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 生成的格. 有时又把 $\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 和 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 分别简记为 $\mathscr{M}_\gamma$ 和 $\mathscr{L}_\gamma$.

**定义10.2**　格 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 称为伪辛几何中由**维数** $m$ **和秩** $2s+\gamma$ 的**子空间生成的格**.

## § 10.2　$(m, 2s+\gamma)$ 子空间存在的条件

**定理10.1**　在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中，关于 $S_\delta$ 存在 $(m, 2s+\gamma)$ 子空间，其中 $\gamma=0$ 或 1，当且仅当

$$2s+\gamma \leqslant m \leqslant \begin{cases} \nu+s+\delta-1, & \text{如果 } \gamma=0, \\ \nu+s+1, & \text{如果 } \gamma=1. \end{cases} \tag{10.1}$$

**证明** 我们分 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 两种情形.

(a) $\gamma=0$. 对于 $\delta=1$，(10.1)变成

$$2s \leqslant m \leqslant \nu+s. \tag{10.2}$$

由定理7.1，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$中关于 $S_1$ 存在$(m,2s,s,0)$或$(m,2(s-1)+2,s-1,0)$型子空间，当且仅当(10.2)成立. 因为$(m,2s,s,0)$或$(m,2(s-1)+2,s-1,0)$型子空间恰好是$(m,2s)$子空间，所以，当 $\delta=1$ 时，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中关于 $S_1$ 存在 $(m,2s)$ 子空间，当且仅当(10.2)成立.

对于 $\delta=2$，(10.1)变成

$$2s \leqslant m \leqslant \nu+s+1. \tag{10.3}$$

由定理7.1，如果(10.3)成立，那么$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中关于 $S_2$ 存在$(m,2(s-1)+2,s-1,1)$型子空间，而$(m,2(s-1)+2,s-1,1)$型子空间是$(m,2s)$子空间. 所以，当(10.3)成立时，$\mathbb{F}_q^{(2\nu-2)}$ 中关于 $S_2$ 存在$(m,2s)$子空间. 反之. 假设$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中关于 $S_2$ 存在$(m,2s)$子空间. 设 $P$ 是这样的一个子空间，那么 $P$ 是$(m,2s,s,\epsilon)$型，或是$(m,2(s-1)+2,s-1,\epsilon)$型子空间，其中 $\epsilon=0$ 或 1. 如果 $P$ 是$(m,2(s-1)+2,s-1,1)$型子空间，那么由定理 7.1，有(10.3)成立. 如果 $P$ 是$(m,2s,s,1)$型子空间，那么由定理7.1，有 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$. 由此可知(10.3)成立. 如果 $P$ 是$(m,2s,s,0)$型，或是$(m,2(s-1)+2,s-1,0)$型子空间，那么由定理7.1，有 $2s\leqslant m\leqslant \nu+s$. 因而(10.3)也成立.

(b) $\gamma=1$. 这时(10.1)变成

$$2s+1 \leqslant m \leqslant \nu+s+1. \tag{10.4}$$

对于 $\delta=2$，由定理7.1，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$中关于 $S_2$ 存在$(m,2s+1,s,0)$型子空间，当且仅当(10.4)成立. 但$(m,2s+1,s,0)$型子空间是$(m,2s+1)$子空间，并且反过来也成立. 因此在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 中关于 $S_2$ 存在$(m,2s+1)$子空间，当且仅当(10.4)成立.

对于 $\delta=1$. 如果(10.4)成立，那么由定理7.1，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中关

于 $S_1$ 存在$(m,2s+1,s,1)$型子空间，而$(m,2s+1,s,1)$型子空间是$(m,2s+1)$子空间. 所以，当(10.4)成立时，在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中存在$(m,2s+1)$子空间. 反之，假设在$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$中关于 $S_1$ 存在$(m,2s+1)$子空间. 令 $P$ 是这样的一个子空间，那么 $P$ 是$(m,2s+1,s,0)$，或是$(m,2s+1,s,1)$型子空间. 如果 $P$ 是$(m,2s+1,s,0)$型子空间. 那么由定理7.1，有 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s$. 因(10.4)成立. 如果 $P$ 是$(m,2s+1,s,1)$型子空间，那么由定理7.1，也有(10.4)成立. □

根据定理7.1，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(m,2s;2\nu+1)=&\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+1)\\&\cup\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1),\end{aligned}\tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(m,2s;2\nu+2)=&\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+2)\\&\cup\mathscr{M}(m,2s,s,1;2\nu+2)\\&\cup\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)\\&\cup\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2),\end{aligned}\tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)=&\mathscr{M}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\\&\cup\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),\end{aligned}\tag{10.7}$$

$$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+2)=\mathscr{M}(m,2s+1,s,0;2\nu+2).\tag{10.8}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)\supset&\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1)\\&\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1),\end{aligned}\tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)\supset&\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+2)\\&\cup\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)\\&\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2).\end{aligned}\tag{10.10}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=&\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)\\&\cup\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),\end{aligned}\tag{10.11}$$

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2).\tag{10.12}$$

根据推论2.9，可得

**定理10.2** 设$n=2\nu+\delta, m\neq n$，并且$(m, 2s+\gamma)$满足(10.1)

$$2s+1\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\delta-1, & \text{如果 } \gamma=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } \gamma=1.\end{cases}$$

那么$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$是有限原子格，$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$和$\bigcap_{X\in\mathscr{M}_T} X$分别是它的最小元和最大元，而$\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$是它的原子集合.

□

## §10.3 若干引理

**引理10.3** 设$n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m, 2s+\gamma)$满足(10.1)

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\delta-1, & \text{如果 } \gamma=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } \gamma=1.\end{cases}$$

那么

$$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1, 2s+\gamma; 2\nu-\delta),$$

除非以下两种情形出现：

(i) $\gamma=0, \delta=2$，而$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$，

(ii) $\gamma=1, \delta=1$，而$2s+1\leqslant m=\nu+s+1$.

**证明** 我们只需证明

$$\mathscr{M}(m-1, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta). \tag{10.13}$$

如果$m-1<2s+\gamma$，那么

$$\mathscr{M}(m-1, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)=\phi\subset\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta).$$

下面假定$m-1\geqslant 2s+\gamma$. 这时

$$\mathscr{M}(m-1, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)\neq\phi.$$

令

$$P\in\mathscr{M}(m-1, 2s+\gamma; 2\nu+\delta).$$

我们分以下四种情形：

(a) $\gamma=0$ 而 $\delta=1$. 这时$P$是$(m-1, 2s, s, 0)$型，或是$(m-1,$

$2(s-1)+2,s-1,0)$型子空间. 现在(10.1)变成 $2s\leqslant m\leqslant \nu+s$. 由引理7.6, 如果 $P$ 是$(m-1,2s,s,0)$型子空间, 那么

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1);$$

如果 $P$ 是$(m-1,2(s-1)+2,s-1,0)$型子空间, 那么

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1).$$

从(10.9)得到 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)$. 因此(10.13)成立.

(b) $\gamma=0$ 而 $\delta=2$. 这时 $P$ 是$(m-1,2s,s,\varepsilon)$型子空间, 或是$(m-1,2(s-1)+2,s-1,\varepsilon)$型子空间,其中 $\varepsilon=0$ 或 1. 现在(10.1)变成 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s+1$. 我们假定 $m-1\geqslant 2s$. 所以 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1$. 首先考虑 $\varepsilon=1$ 的情形. 由引理7.16,如果 $P$ 是$(m-1,2s,s,1)$型子空间, 那么

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2s,s,1;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2);$$

如果 $P$ 是$(m-1,2(s-1)+2,s-1,1)$型子空间, 那么

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2).$$

从(10.10)有 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 现在考虑 $\varepsilon=0$. 如果 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s$,那么如同 $\varepsilon=1$ 的情形, 可以同样得到 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 然而, 如果 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$,那么由定理7.1, 有

$\mathscr{M}(m,2s,s,0;2\nu+2)=\phi$ 和 $\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)=\phi$.

从(10.10)得到

$$\mathscr{M}(m,2s;2\nu+2)=\mathscr{M}(m,2s,s,1;2\nu+2)$$
$$\cup\,\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2),$$

而 $\mathscr{M}(m,2s,s,1;2\nu+2)$和 $\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2)$中的子空间均包含 $e_{2\nu+1}$,所以 $\mathscr{M}(m,2s;2\nu+\delta)$中的子空间也如此. 因而 $\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$中的所有子空间都包含 $e_{2\nu+1}$. 于是 $P\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 因此"$\gamma=0,\delta=2$,而 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$"的情形被排除.

(c) $\gamma=1$ 而 $\delta=1$. 这时 $P$ 是$(m-1,2s+1,s,\varepsilon)$型子空间, 其

中 $\varepsilon=0$ 或 1. 现在(10.1)变成 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$. 如果 $\varepsilon=1$,可以假定 $P$ 具有形式

$$P=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} m-2 \\ 1 \end{matrix},$$
$$\quad\ \begin{matrix} 2\nu & 1 \end{matrix}$$

其中 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的 $(m-2,s)$ 型子空间. 由引理 3.2, $Q\in\mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$. 所以 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$. 再由(10.11),有 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$. 因此(10.13)成立. 现在考虑 $\varepsilon=0$ 的情形. 如果 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s$,那么引理7.6,有

$$\begin{aligned} P\in\mathscr{L}&(m-1,2s+1,s,0;2\nu+1)\\ &\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1). \end{aligned}$$

然而,如果 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$, 那么由定理7.1, 有

$$\mathscr{M}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)=\phi.$$

因而(10.7)变成

$$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1),$$

所以

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

由此推出 $\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$ 中的所有子空间包含 $e_{2\nu+1}$. 因此 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$. 于是"$\gamma=1,\delta=1$ 而 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$"的情形被排除.

(d) $\gamma=1$ 而 $\delta=2$. 这时由定理7.1, 可知 $P$ 是 $(m-1,2s+1,s,0)$ 型子空间,而(10.1)变成 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1$. 由引理7.16,有

$$\begin{aligned} P\in\mathscr{L}&(m-1,2s+1,s;0;2\nu+2)\\ &\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2). \end{aligned}$$

所以 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$. 因此(10.13)成立. □

**引理10.4** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1,s\geqslant 1$,并且 $(m,2s+\gamma)$ 满足(10.1). 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\gamma;2\nu+\delta).$$

**证明** 只需证明

$$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\gamma;2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta).$$

因为$(m,2s+\gamma)$满足(10.1)，所以$(m-1,2(s-1)+\gamma)$也满足(10.1). 因而

$$\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\gamma;2\nu+\delta)\neq\phi.$$

令

$$P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+\gamma;2\nu+\delta).$$

我们分以下四种情形：

(a) $\gamma=0$ 而 $\delta=1$. 这时 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1,0)$型，或是$(m-1,2(s-2)+2,s-2,0)$型子空间. 显然，后一种情形在 $s\geqslant 2$ 时出现. 现在(10.1)变成 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s$. 由引理7.7，如果 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1,0)$型子空间，那么

$$\begin{aligned}P&\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1),s-1,0;2\nu+1)\\&\subset\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+1);\end{aligned}$$

如果 $P$ 是$(m-1,2(s-2)+2,s-2,0)$型子空间，那么

$$\begin{aligned}P&\in\mathscr{L}(m-1,2(s-2)+2,s-2,0;2\nu+1)\\&\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1).\end{aligned}$$

根据(10.9)，在这两种情形，均有 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)$.

(b) $\gamma=0$ 而 $\delta=2$. 这时 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1,\varepsilon)$型，或是$(m-1,2(s-2)+2,s-2,\varepsilon)$型子空间，其中 $\varepsilon=0$ 或 1. 显然，后一种情形只在 $s\geqslant 2$ 时出现. 现在(10.1)变成 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s+1$.

先考虑 $\varepsilon=0$ 的情形. 如果 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1,0)$型子空间，那么由定理7.1，有 $2(s-1)\leqslant m-1\leqslant\nu+(s-1)$. 此不等式与 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s-1$ 联立，可得 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s$. 根据引理7.17，有

$$\begin{aligned}P&\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1),s-1,0;2\nu+2)\\&\subset\mathscr{L}(m,2s,s,0;2\nu+2).\end{aligned}$$

如果 $P$ 是$(m-1,2(s-2)+2,s-2,0)$ 型子空间，那么由定理7.1，有 $2(s-2)+2\leqslant m-1\leqslant\nu+(s-2)+1$. 此不等式与 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s+1$ 联立，得到 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s$. 由引理7.17，有

$$\begin{aligned}P&\in\mathscr{L}(m-1,2(s-2)+2,s-2,0;2\nu+2)\\&\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2).\end{aligned}$$

根据(7.10)，在这两种情形，均有 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$.

其次考虑 $\varepsilon=1$ 的情形. 根据引理7.17. 如果 $P$ 是$(m-1,2(s-1),s-1,1)$型子空间，那么

$$P \in \mathscr{L}(m-1,2(s-1),s-1,1;2\nu+2)$$
$$\subset \mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2);$$

如果 $P$ 是$(m-1,2(s-2)+2,s-2,1)$型子空间，那么

$$P \in \mathscr{L}(m-1,2(s-2)+2,s-2,1;2\nu+2)$$
$$\subset \mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2).$$

在这两种情形，从(10.10)得到 $P\in \mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$.

(c) $\gamma=1$ 和 $\delta=1$. 这时 $P$ 是$(m-1,2(s-1)+1,s-1,\varepsilon)$型子空间，其中 $\varepsilon=0$ 或 1，而(10.1)变成 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$. 如果 $\varepsilon=0$，也即，$P$ 是$(m-1,2(s-1)+1,s-1,0)$型子空间，那么由定理7.1，有 $2(s-1)+1\leqslant m-1\leqslant \nu+(s-1)$. 此不等式与 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$ 联立，可得 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s$. 根据引理7.7，有

$$P \in \mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1)$$
$$\subset \mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1).$$

如果 $\varepsilon=1$，也即，$P$ 是$(m-1,2(s-1)+1,s-1,1)$型子空间，那么可以假定 $P$ 具有形式

$$P=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} m-2 \\ 1 \end{matrix},$$
$$\quad\begin{matrix} 2\nu & 1 \end{matrix}$$

其中 $Q$ 是 $2\nu$ 维辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中的一个$(m-2,s-1)$型子空间. 由引理3.2，有 $Q\in \mathscr{L}(m-1,s;2\nu)$. 由此可得 $P\in \mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)$. 因此由(10.11)可得 $P\in \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

(d) $\gamma=1$ 而 $\delta=2$. 这时 $P$ 是$(m-1,2(s-1)+1,s-1,0)$型子空间，而(10.1)变成 $2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1$. 根据引理7.17，有

$$P \in \mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+2)$$
$$\subset \mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2).$$

因此 $P\in \mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)$. □

**引理10.5** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant 1$，并且$(m,2s+1)$满足

$$2s+1\leqslant m\leqslant \nu+s+1,$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m-1,2s;2\nu+1),\text{如果 }\delta=1,\\ \mathscr{L}(m-1,2s,0;2\nu+2)\\ \cup\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2),\\ \qquad\qquad\text{如果 }\delta=2,\end{cases}$$

除非

$$\delta=1 \text{ 和 } 2s+1\leqslant m=\nu+s+1$$

的情形出现.

**证明** 我们分 $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 两种情形.

(a) $\delta=1$. 对于 $P\in\mathscr{M}(m-1,2s;2\nu+1)$，那到 $P$ 是 $(m-1,2s,s,0)$ 型，或是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1,0)$ 型子空间，而后一种情形只在 $s\geqslant1$ 时出现.

首先考虑 $2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s$ 的情形. 如果 $P$ 是 $(m-1,2s,s,0)$ 型子空间，那么由引理7.8，有

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+1)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1);$$

如果 $P$ 是 $(m-1,2(s-1)+2,s-1,0)$ 型子空间，那么由引理7.10有

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+1).$$

所以在这两种情形下，有 $P\in\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$.

其次考虑 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$ 的情形. 由定理7.1，有

$$\mathscr{M}(m,2s+1,s,0;2\nu+1)=\phi.$$

再根据(10.7)，得到

$$\mathscr{M}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{M}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

所以

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

因而在 $\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$ 中的所有子空间均含有 $e_{2\nu+1}$. 但现在 $e_{2\nu+1}\notin P$. 于是 $P\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$. 这正是我们要排除的情形.

(b) $\delta=2$. 由引理7.18，有

$$\mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2);$$

由引理7.20，有

$$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2).$$

而从(10.12)得

$$\mathscr{L}(m,2s+1,s,0;2\nu+2)=\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2).$$

因此

$$\mathscr{L}(m-1,2s,s,0;2\nu+2)\cup\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2).$$ □

**引理10.6** 设 $n=2\nu+\delta>m\geqslant1,s\geqslant1$，并且$(m,2s)$满足

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s+\delta-1. \tag{10.14}$$

那么

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+\delta)\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1), & \text{如果 } \delta=1,\\ \mathscr{L}(m-1,2s-1;2\nu+2), & \text{如果 } \delta=2,\end{cases}$$

除非

$$\delta=2 \text{ 而 } 2s\leqslant m=\nu+s+1$$

的情形出现.

**证明** 我们分 $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 两种情形.

(a) $\delta=1$. 这时(7.14)变成 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s$. 由引理7.8，有

$$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1).$$

根据(10.9)，得到

$$\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1).$$

所以

$$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+1)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1).$$

(b) $\delta=2$. 这时(7.14)变成 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s+1$.

由(10.12)有

$$\mathscr{L}(m-1,2s-1;2\nu+2)$$
$$=\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+2).$$

设

$$P\in\mathscr{M}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+2).$$

如果 $2s\leqslant m\leqslant\nu+s$，那么由引理7.18，有

$$P\in\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+2)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2).$$

根据(7.10)，可得

$$\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,0;2\nu+2)\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2).$$

所以 $P\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 因此

$$\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+1,s-1,0;2\nu+2)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2).$$

然而，如果 $2s\leqslant m=\nu+s+1$，那么类似于引理10.3的证明(b)中 $2s+1\leqslant m=\nu+s+1$ 的情形，可以证明 $P\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 这也是我们要排除的情形. □

## §10.4 格 $\mathscr{L}(m,2s+\gamma,2\nu+\delta)$之间的包含关系

**定理10.7** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\gamma)$和$(m_1,2s_1+\gamma_1)$满足(10.1)，即

$$2s+\gamma\leqslant m\leqslant\begin{cases}\nu+s+\delta-1, & \text{如果 } \gamma=0,\\ \nu+s+1, & \text{如果 } \gamma=1,\end{cases}$$

和

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1\leqslant\begin{cases}\nu+s_1+\delta-1, & \text{如果 } \gamma_1=0,\\ \nu+s_1+1, & \text{如果 } \gamma_1=1\end{cases}$$

成立. 如果

$$2s+\gamma\leqslant m=\nu+s+1 \tag{10.15}$$

成立时，表10.1所列的情形不出现. 那么

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+1)$$

$$\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1)\cup\mathscr{L}(m_1,2s_1;\\ \quad 2\nu+1), & \text{如果 } \gamma=0,\\ \mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+1), & \text{如果 } \gamma=1\end{cases} \tag{10.16}$$

和

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+2)$$
$$\supset\begin{cases}\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+2), & \text{如果 } \gamma=0\\ \mathscr{L}(m_1,2s_1,s_1,0;2\nu+2)\cup\mathscr{L}(m_1,2(s_1-1)\\ \quad +2,s_1-1,0;2\nu+2)\\ \quad \cup\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+2), & \text{如果 } \gamma=1,\end{cases} \tag{10.17}$$

的充分必要条件是

$$2m-2m_1\geqslant(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)\geqslant 0 \tag{10.18}$$

**表 10.1**

| $\delta$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $m_1$ | $s_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ |
| 1 | 1 | 1 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ |
| 2 | 0 | 0 | $m-t-t'$ | $s-t\geqslant 0$ |
| 2 | 0 | 1 | $m-t-t'$ | $s-t-1\geqslant 0$ |

其中 $t'$ 是满足 $1\leqslant t'\leqslant m-t$ 的整数.

**证明** 充分性. 根据(10.18)，可以假定

$$(2s+\gamma)-(2s_1+\gamma_1)=2t+l \tag{10.19}$$

和

$$m-m_1=t+t', \tag{10.20}$$

其中 $t$，$t'\geqslant 0$ 和

$$l=\begin{cases}0, & \text{如果 } \gamma=\gamma_1,\\ 1, & \text{如果 } |\gamma-\gamma_1|=1.\end{cases}$$

从(10.18),(10.19)和(10.20)，可得 $2t'\geqslant l$. 因为$(m,2s+\gamma)$满足(10.1)，所以对于 $1\leqslant i\leqslant t$，$(m-i,2(s-i)+\gamma)$也满足(10.1). 连续地应用引理10.4，得到

$$\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m-1,2(s-1)+\gamma;2\nu+\delta)$$
$$\supset\cdots\supset\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma;2\nu+\delta).\qquad(10.21)$$

下面分 $l=0$ 和 $l=1$ 两种情形.

(a) $l=0$. 这时 $\gamma=\gamma_1$. 从(10.19)推出 $s-s_1=t$. 由(10.20)有 $m-t=m_1+t'$. 所以

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma;2\nu+\delta)$$
$$=\mathscr{L}(m+t',2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta).\qquad(10.22)$$

我们再分以下两种情形:

(a.1) $t'=0$. 从(10.21)和(10.22)得到

$$\mathscr{L}(m,2s-\gamma;2\nu+\delta)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta).$$
$$(10.23)$$

(a.2) $t'\geqslant 1$. 由 $(m_1,2s_1+\gamma_1)$ 满足(10.1)可知 $\mathscr{M}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)\neq\phi$. 为要证明(10.23)成立，先断言：如果对于使得 $0\leqslant j\leqslant t'-1$ 的一些整数 $j$，$(m_1+t'-j,2s_1+\gamma_1)$ 满足

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1-t'-j=\nu+s_1+1\qquad(10.24)$$

并且情形

$$\text{“}\gamma_1=\delta=1\text{” 和“}\gamma_1=0,\delta=2\text{”}\qquad(10.25)$$

之一出现，那么 $j=0$. 事实上，从(10.20)和(10.24)推出

$$m-t-j=m_1+t'-j=\nu+s_1+1.$$

因为 $t=s-s_1$ 和 $\gamma=\gamma_1$，所以

$$m-j=\nu+s+1.$$

面 $(m,2s+\gamma)$ 满足(10.1)，因而 $j=0$.

下面来证明：在 $\gamma=\gamma_1$ 和(10.1)成立的条件下，

$$2s_1+\gamma_1\leqslant m_1+t'=\nu+s_1+1\qquad(10.26)$$

等价于(10.15). 事实上，假设(10.26)成立，那么从(10.20)和(10.26)推出 $m-t=\nu+s_1+1$. 但 $t=s-s_1$，所以 $m=\nu+s+1$，而(10.1)成立，因此(10.15)成立. 反之，假设(10.15)成立. 从 $s-s_1=t$，$2s+\gamma\leqslant m$，$m-t=m_1+t'$ 和 $\gamma=\gamma_1$，可得

$$2s_1+\gamma_1=2(s-t)+\gamma_1=2s+\gamma-2t\leqslant m-2t$$
$$=m_1-t+t'\leqslant m_1+t'$$

和

$$m_1+t'=m-t=m-s+s_1=\nu+s_1+1,$$

也即，(10.26)成立.

根据上面的断言和证明的事实. 在定理10.7的题设和$\gamma=\gamma_1$的条件下，(10.26)和(10.25)的情形之一不同时出现. 而(10.25)所列的情形正是表10.1中的第2行和第3行. 因而可以连续地应用引理10.3,我们得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)\supset\\&\quad\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)\supset\cdots\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-t',2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)\\&\quad=\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta).\end{aligned}\tag{10.27}$$

从(10.21),(10.22),(10.27)和上述结论可得到(10.23)，除非(10.15)成立和表10.1的第2行或第3行所列的情形出现.

(b) $l=1$. 因为$2t'\geqslant l$,所以$t'>0$,并且$|\gamma-\gamma_1|=1$,我们再分"$\gamma=1$，$\gamma_1=0$" 和 "$\gamma=0$，$\gamma_1=1$" 两种情形.

(b.1) $\gamma=1$，$\gamma_1=0$. 从(10.19)得到$s-s_1=t$，那么

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+1;2\nu+\delta)=\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+1;2\nu+\delta)\tag{10.28}$$

又分$\delta=1$和$\delta=2$两种情形.

(b.1.1) $\delta=1$. 如同(a.2)的情形，在"$\gamma=1,\gamma_1=0$"和(10.1)成立的条件下，可以证明:

$$2s_1+1\leqslant m_1+t'=\nu+s_1+1\tag{10.29}$$

等价于(10.15). 因面在给定的题设和 "$\gamma=1$，$\gamma_1=0$" 的条件下，(10.29)和"$\delta=\gamma=1$而$\gamma_1=0$"的情形不同时出现. 而"$\delta=\gamma=1,\gamma_1=0$"正是表10.1的第1行. 因而可以应用引理10.5,得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+1;2\nu+1)\\&\quad\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1;2\nu+1).\end{aligned}\tag{10.30}$$

根据引理10.3,有

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+1).\tag{10.31}$$

从(10.21),(10.28),(10.30),(10.31)和如上的结论得到

$$\mathscr{L}(m,2s-1;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1;2\nu+1),\quad(10.32)$$

除非(10.15)和表10.1的第1行所列的情形出现.

(b.1.2) $\delta=2$. 由引理10.5,有

$$\mathscr{L}(m_1+t',2s_1+1;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1,s_1,0;2\nu+2)$$
$$\cup\mathscr{L}(m_1+t'-1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2).\quad(10.33)$$

注意到:如果 $s_1=0$,那么

$$\mathscr{M}(m_1+t'-1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2)=\phi,$$

并且

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2)=\{\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}\}.$$

因为$(m,2s+1)$满足(10.1),所以$(m-t,2(s-t)+1)$也满足(10.1),也即,$(m_1+t',2s_1+1)$满足(10.1).由此可得$(m_1+t'-1,2s_1,s_1,0)$和$(m_1+t'-1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0)$都满足(7.2).由引理7.16,有

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1,s_1,0;2\nu+2)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1,s_1,0;2\nu+2).\quad(10.34)$$

和

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2)\quad(10.35)$$

从(10.21),(10.28),(10.33),(10.34)和(10.35)得到

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1,s_1,0;2\nu+2)$$
$$\cup\mathscr{L}(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2).$$

(b.2) $\gamma=0$, $\gamma_1=1$. 由(10.19)有$s-s_1=t+1$.所以

$$\mathscr{L}(m-t,2(s-t)+\gamma;2\nu+\delta)=\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+\delta).\quad(10.36)$$

我们又分 $\delta=1$ 和 $\delta=2$ 两种情形.

(b.2.1) $\delta=1$. 由引理10.6,有

$$\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1).\quad(10.37)$$

从$(m_1+t'-1,2s_1+1)$满足(10.1)，可知$(m_1+t'-1,2s_1+1,s_1,0)$满足(7.2)，按照(b.1.2)的情形推导，我们得到

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1)$$
$$\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1). \qquad (10.38)$$

从(10.21)，(10.36)，(10.37)和(10.38)可得

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1).$$

(b.2.2)　$\delta=2$. 如同(a.2)的情形，在"$\gamma=0$，$\gamma_1=1$"和(10.1)成立的条件下，可以证明

$$2(s_1+1)\leqslant m_1+t'=\nu+(s_1+1)+1 \qquad (10.39)$$

等价于(10.15). 因而在给定的题设和"$\gamma=0$，$\gamma_1=1$"的条件下，(10.39)和"$\delta=2$，$\gamma=0$而$\gamma_1=1$"的情形不同时出现. 而"$\delta=2$，$\gamma=0$和$\gamma_1=1$"的情形正好是表10.1中的第4行. 因而由引理10.6，有

$$\mathscr{L}(m_1+t',2(s_1+1);2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s_1+1;2\nu+2). \qquad (10.40)$$

根据引理10.3，有

$$\mathscr{L}(m_1+t'-1,2s+1;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+2). \qquad (10.41)$$

从(10.21)，(10.36)，(10.40)，(10.41)和上面的结论可得

$$\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)\supset\mathscr{L}(m_1,2s_1+1;2\nu+2).$$

除非(10.15)和表10.1的第4行所列的情形出现.

当$\delta=1$时，综合(a.1)，(a.2)，(b.1.1)和(b.2.1)情形的结果，我们得到(10.16)，除非(10.15)成立时，表10.1中的第1行或第2行出现；当$\delta=2$时，综合(a.1)，(a.2)，(b.1.2)和(b.2.2)情形的结果，我们得到(10.17)，除非(10.15)成立时，表10.1中第3行或第4行出现.

必要性. 假设(10.16)和(10.17)成立. 我们分"$\delta=\gamma=1$"，"$\delta=2,\gamma=0$"，"$\delta=1,\gamma=0$"和"$\delta=2,\gamma=1$"四种情形. 我们只对"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2,\gamma=0$"的情形证明，其余的两种情形可类似地进行.

假设

$$2s+\gamma \leqslant m < \nu+s+1 \qquad (10.42)$$

成立. 由$(m_1, 2s_1+\gamma_1)$满足(10.1)可知$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta) \neq \phi$, 由$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta) \subset \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta)$和$\mathscr{L}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta) \subset \mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$, 有$\mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta) \subset \mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$. 对于任意$Q \in \mathscr{M}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta) \subset \mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$, 那么存在$(m, 2s+\gamma)$子空间$P$, 使得$Q \subset P$. 如果$Q=P$, 那么$m_1=m, s_1=s$和$\gamma_1=\gamma$. 所以(10.18)成立. 现在设$Q \neq P$, 那么$m_1<m, 2s_1+\gamma_1 \leqslant 2s+\gamma$和$s_1 \leqslant s$. 令$m-m_1=t$. 因为$P$和$P_1$的秩分别是$2s+\gamma$和$2s_1+\gamma_1$, 所以$2s_1+\gamma_1 \geqslant 2s+\gamma-2t$. 因此(10.18)也成立.

现在设$(m, 2s+\gamma)$满足(10.15). 我们再分"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2, \gamma=0$"两种情形.

(a) $\delta=\gamma=1$. 因为$(m, 2s+\gamma)$满足(10.15), 所以由定理7.1, 有$\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)=\phi$. 因而$\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)=\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$. 如果$Q \in \mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)=\mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$. 那么由定理7.12可知, $Q$是$(m_1, 2s_1+1, s_1, 1)$型子空间, 并且$(m_1, 2s_1+1, s_1, 1)$满足$m-m_1 \geqslant s-s_1 \geqslant 0$, 也即, $(m_1, 2s_1+1)$满足(10.18).

(b) $\delta=2$和$\gamma=0$. 因为(10.15)成立, 所以由定理7.1, 有$\mathscr{M}(m, 2s, s, 0; 2\nu+2)=\phi$和$\mathscr{M}(m, 2(s-1)+2, s-1, 0; 2\nu+2)=\phi$. 根据(10.6), 有

$$\mathscr{M}(m, 2s; 2\nu+2)=\mathscr{M}(m, 2s, s, 1; 2\nu+2) \cup \mathscr{M}(m, 2(s-1)+2, s-1, 1; 2\nu+2).$$

所以$\mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+2)$中的子空间均含$e_{2\nu+1}$. 对于$Q \in \mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+2)$, 那么由定理7.27, 可知$Q$必是$(m_1, 2s_1, s_1, 1)$型子空间, 或是$(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1, 1)$型子空间. 于是存在$P \in \mathscr{M}(m, 2s; 2\nu+2)$, 而$P$又必须是$(m, 2s, s, 1)$型子空间, 或是$(m, 2(s-1)+2, s-1, 1)$型子空间. 并且满足$Q \subset P$. 对于$P$和$Q$的四种组合中之一, 我们用上述的推导方法, 可证得(10.18)成立. □

**定理10.8** 设$n=2\nu+\delta \geqslant 1, m \neq n$, 并且$(m, 2s+\gamma)$满足

(10.15)，其中 $\gamma=0, 1$. 而 $(m_1, 2s_1+\gamma_1)$ 满足(10.1)，其中 $\gamma_1=0, 1$，并且(10.18)成立. 如果表10.1所列的情形之一出现，而

$$2s_1+\gamma_1 \leqslant m_1 = \nu + s_1 + 1$$

不成立. 那么

$$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta) \not\supset \mathscr{L}(m_1, 2s_1+\gamma_1; 2\nu+\delta).$$

**证明** 我们只对表10.1第1行所列的情形验证，其余各行可类似地进行.

在第1行，$\delta=1, \gamma=1, \gamma_1=0, m_1=m-t-t', s_1=s-t$. 显然，$2m-2m_1=2t+2t' \geqslant 2t+1=(2s+1)-2s_1 \geqslant 0$. 由(10.15)和定理7.1，可知 $\mathscr{M}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)=\phi$. 因而 $\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1) = \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1)$. 我们按表10.1第1行取定 $m_1$ 和 $s_1$ 后，根据 $(m_1, 2s_1)$ 满足(10.1)而不满足(10.15)，有 $\mathscr{M}(m_1, 2s_1, s_1, 0; 2\nu+1) \neq \phi$. 对于 $Q \in \mathscr{M}(m_1, 2s_1, s_1, 0; 2\nu+1)$，由定理7.11(a)，可知 $Q \in \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$. 因而 $\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1) \not\supset \mathscr{L}(m_1, 2s_1; 2\nu+1)$. □

## §10.5 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间在 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 中的条件

**定理10.9** 设 $n=2\nu+\delta \geqslant 1, m \neq n$，并且 $(m, 2s+\gamma)$ 满足(10.1).

(i) 对于"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2$，$\gamma=0$"的情形. 如果(10.42)

$$2s+\gamma \leqslant m < \nu+s+1$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 和满足(10.18)的所有 $(m_1, 2s_1+\gamma_1)$ 子空间组成. 然而，如果(10.15)

$$2s+\gamma \leqslant m = \nu+s+1$$

成立，那么 $\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 和所有 $(m_1, 2s_1+1, s, 1)$ 型子空间组成. 其中 $(m_1, 2s_1+1)$ 满足(10.18)；而 $\mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+2)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$ 和所有 $(m_1, 2s_1, s_1, 1)$ 型以及 $(m_1, 2(s_1-1)+2, s_1-1,$

1)型子空间组成，其中$(m_1,2s_1)$满足(7.18).

(ii) 对于“$\delta=1,\gamma=0$”的情形. $\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$，满足(10.18)的所有$(m_1,2s_1)$子空间和$(m_1,2s_1+1)$满足(10.18)的所有$(m_1,2s_1+1,s_1,0)$型子空间组成.

(iii) 对于“$\delta=2,\gamma=1$”的情形. $\mathscr{L}(m,2s-1;2\nu+2)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$，所有$(m_1,2s_1+1)$子空间，所有$(m_1,2s_1,s_1,0)$型和所有$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0)$型子空间组成，其中所对应的$(m_1,2s_1+1)$，$(m_1,2s_1)$和$(m_1,2(s_1-1)+2)$满足(10.18).

**证明** (i) $\delta=\gamma=1$或$\delta=2$而$\gamma=0$. 假定(10.42)成立，由我们的约定$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta)$. 设$Q$是一个$(m_1,2s_1+\gamma_1)$子空间，其中$(m_1,2s_1+\gamma_1)$满足(10.18). 那么由定理10.7，有

$$Q\in\mathscr{L}(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)\subset\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta).$$

反之，设$Q$是$(m_1,2s_1+\gamma_1)$子空间，$Q\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$，而$Q\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta)$. 那么存在$(m,2s+\gamma)$子空间$P$，使得$Q\subset P$. 按照定理10.7必要性的证明，可以证得(10.18)成立.

现在$(m,2s+\gamma)$满足(10.15). 由我们的约定总有$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\in\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta)$. 设$Q$是一个$(m_1,2s_1+\gamma_1)$子空间，$Q\neq\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$. 我们分“$\delta=\gamma=1$”和“$\delta=2,\gamma=0$”两种情形.

(a) $\delta=\gamma=1$. 因为(10.15)成立. 所以由定理7.1，有

$$\mathscr{M}(m,s+1,s,0;2\nu+1)=\phi.$$

因而

$$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1).$$

如果$\gamma_1=0$，也即，$Q$是一个$(m_1,2s_1)$子空间，那么由定理7.1，可知$Q$是$(m_1,2s_1,s_1,0)$型，或是$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0)$型子空间，因而$Q\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+\delta)$. 如果$\gamma_1=1$，也即，$Q$是一个$(m_1,2s_1+1)$子空间，那么$Q$是$(m_1,2s_1+1,s_1,\varepsilon_1)$型子空间，其中$\varepsilon_1=0$或1. 如果$Q$是$(m_1,2s_1+1,s_1,0)$型子空间，那么也有$Q\notin\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$；如果$Q$是$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$型子空间，那么由定理7.12，$Q\in\mathscr{L}(m,2s+1,s,1;2\nu+1)=\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$当且仅当$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$满足$m-m_1\geqslant s-s_1\geqslant 0$，也即，$(m_1,2s_1$

$+1)$满足(10.18). 这样，我们就得到：如果$\delta=\gamma=1$，那么$\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+1)$由$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$和所有$(m_1,2s_1+1,s_1,1)$子空间组成，其中$(m_1,2s_1+1)$满足(10.18).

(b) $\delta=2$ 而 $\gamma=0$. 按照定理10.7必要性证明中(b)的推导，我们有

$$\mathscr{M}(m,2s;2\nu+2)=\mathscr{M}(m,2s,s,1,2\nu+2)$$
$$\cup\mathscr{M}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2).$$

如果$\gamma_1=1$，也即，$Q$是$(m_1,2s_1+1)$子空间，那么$Q$是$(m_1,2s_1+1,s_1,0)$型子空间，因而$Q\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 如果$\gamma_1=0$，也即，$Q$是$(m_1,2s_1)$子空间，那么$Q$是$(m_1,2s_1,s_1,\varepsilon_1)$型，或是$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,\varepsilon_1)$型子空间，其中$\varepsilon_1=0$或1. 如果$Q$是$(m_1,2s_1,s_1,0)$型，或是$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0)$型子空间，那么$Q\notin\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 设$Q$是$(m_1,2s_1,s_1,1)$型，或是$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,1)$型子空间，那么由定理7.27分别有

$$Q\in\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2),$$

或

$$Q\in\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2)$$

当且仅当(10.18)成立. 由(10.10)有

$$\mathscr{L}(m,2s,s,1;2\nu+2)\cup\mathscr{L}(m,2(s-1)+2,s-1,1;2\nu+2)$$
$$\subset\mathscr{L}(m,2s;2\nu-2).$$

所以，当(10.18)成立时，有$Q\in\mathscr{L}(m,2s;2\nu+2)$. 反之，假设$Q\in\mathscr{L}(m,s;2\nu+2)$，那么$Q$必是$(m_1,2s_1,s_1,1)$型，或是$(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,1)$型子空间. 于是存在$(m,2s)$子空间$P$，使$Q\subset P$. 按照定理10.7必要性中(b)的证明，可知(10.18)成立.

(ii) $\delta=1$，$\gamma=0$.

(iii) $\delta=2$，$\gamma=1$.

这两种情形可以按照情形(i)中第一段的方法，同样地进行证明，这里略去其详细过程. □

**推论10.10** 设$n=2\nu+\delta\geqslant1$，$m\neq n$，并且$(m,2s+\gamma)$满足(10.1). 那么

$$\{0\} \in \mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta), \qquad (10.43)$$

并且$\{0\} = \bigcap_{X \in \mathscr{M}_\gamma} X$是$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$的最大元. 除非(10.15)

$$2s + \gamma \leqslant m = \nu + s + 1$$

成立时,"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2, \gamma=0$"的情形之一出现. 如果(10.15)成立, 而"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2$, $\gamma=0$"的情形之一出现, 那么$\langle e_{2\nu-1}\rangle$是$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$的最大元.

**证明** 我们把$\{0\}$考虑为$(m_1, 2s_1+\gamma_1)$子空间, 那么$m_1 = s_1 = \gamma_1 = 0$. 由定理10.9, 我们有(10.43)成立, 除非(10.15)成立时,"$\delta=\gamma=1$"和"$\delta=2$, $\gamma=0$"的情形之一出现. 如果(10.15)成立, 而"$\delta=\gamma=1$"的情形出现, 那么由引理10.3的证明, 有

$$\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1) = \mathscr{L}(m, 2s+1, s, 1; 2\nu+1).$$

于是$e_{2\nu+1}$包含在$\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)$的每个子空间中, 因此$\langle e_{2\nu+1}\rangle$是$\mathscr{L}(m, 2s+1; 2\nu+1)$的最大元; 如果(10.15)成立, 而"$\delta=2$, $\gamma=0$"的情形出现, 也由引理10.3的证明, 有

$$\mathscr{M}(m, 2s; 2\nu+2) = \mathscr{M}(m, 2s, s, 1; 2\nu+2) \cup \mathscr{M}(m, 2(s-1)+2, s-1, 1; 2\nu+2).$$

所以$e_{2\nu+1}$包含在$\mathscr{M}(m, 2s; 2\nu+2)$的每个子空间中, 因而$e_{2\nu+1}$也包含在$\mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+2)$的每个子空间中, 所以$e_{2\nu+1}$是$\mathscr{L}(m, 2s; 2\nu+2)$的最大元. □

由定理10.9的证明, 又得到

**推论10.11** 设$n=2\nu+\delta\geqslant 1$, $m\neq n$, 并且$(m, 2s+\gamma)$满足(10.1), 如果$P\in\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$, $P\neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$, 而$Q$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$的子空间, 且$Q\subset P$, 那么$Q\in\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$. □

## §10.6 格$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$的特征多项式

由有限格$L$的特征多项式, 仍可以给出格$\mathscr{L}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)$的特征多项式. 令

$$N(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta) = |\mathscr{M}(m, 2s+\gamma; 2\nu+\delta)|.$$

**定理10.12** 设 $n=2\nu+\delta\geqslant 1$，并且 $m\neq n$.

(i) 对于"$\delta=\gamma=1$"或"$\delta=2,\gamma=0$"，如果(10.42)

$$2s+\gamma\leqslant m<\nu+s+1$$

成立，那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+\gamma;2\nu+\delta),t)$$
$$=\sum_{\gamma_1=0,1}\left(\sum_{s_1=(s-1)-(1-\gamma)\gamma_1}^{[n/2]}\sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{\nu+s_1+1}+\sum_{s_1=0}^{s-(1-\gamma)\gamma_1}\sum_{m_1=m-s+s_1+\gamma(\gamma_1-1)+1}^{\nu+s_1+1}\right)$$
$$N(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+\delta)g_{m_1}(t), \tag{10.44}$$

其中 $g_{m_1}(t)$是 Gauss 多项式.

(ii) 对于"$\delta=1,\gamma=0$"，如果(10.2)

$$2s\leqslant m\leqslant\nu+s$$

成立，那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s;2\nu+1),t)$$
$$=\sum_{\gamma_1=0,1}\left(\sum_{s_1=(s-1)-\gamma_1}^{[n/2]}\sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{\nu+s_1}+\sum_{s_1=0}^{s-\gamma}\sum_{m_1=m-s+s_1+1}^{\nu+s_1}\right)$$
$$N(m_1,2s_1-\gamma_1;2\nu+1)g_{m_1}(t)+\sum_{s_1=0}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+1}^{\nu+s_1+1}$$
$$N(m_1,2s_1+1,s_1,1;2\nu+1)g_{m_1}(t), \tag{10.45}$$

其中的 $g_{m_1}(t)$是 Gauss 多项式.

(iii) 对于"$\delta=2,\gamma=1$"，如果(10.4)

$$2s+1\leqslant m\leqslant\nu+s+1$$

成立，那么

$$\chi(\mathscr{L}(m,2s+1;2\nu+2),t)$$
$$=\sum_{\gamma_1=0,1}\left(\sum_{s_1=s+1}^{[n/2]}\sum_{m_1=2s_1+\gamma_1}^{\nu+s_1+1}+\sum_{s_1=0}^{s}\sum_{m_1=m-s+s_1+\gamma_1}^{\nu+s+\gamma_1}\right)$$
$$N(m_1,2s_1+\gamma_1;2\nu+2)g_{m_1}(t)$$
$$+\sum_{s_1=1}^{\nu}\sum_{m_1=2s_1+1}^{\nu+s_1+1}N(m_1,2s_1,s_1,1;2\nu+2)g_{m_1}(t)$$

$$+\sum_{s_1}^{\nu+1}\sum_{m_1=2s_1}^{\nu+s_1+1} N(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,1;2\nu+2)g_{m_1}(t). \tag{10.46}$$

其中 $g_{m_1}(t)$是 Gauss 多项式.

应注意:由(10.5),(10.6),(10.7)和(10.8)分别可得

$$N(m_1,2s_1;2\nu+1)=N(m_1,2s_1,s_1,0;2\nu+1)$$
$$+N(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+1),$$
$$N(m_1,2s_1;2\nu+2)=N(m_1,2s_1,s_1,0;2\nu+2)$$
$$+N(m_1,2s_1,s_1,1;2\nu+2)$$
$$+N(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,0;2\nu+2)$$
$$+N(m_1,2(s_1-1)+2,s_1-1,1;2\nu+2),$$
$$N(m_1,2s_1+1;2\nu+1)=N(m_1,2s_1+1,s_1,0;2\nu+1)$$
$$+N(m_1,2s_1+1,s_1,1;2\nu+1),$$
$$N(m_1,2s_1+1;2\nu+2)=N(m_1,2s_1+1;s_1,0;2\nu+2).$$

而 $N(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$的准确表示式已由文献[28]给出.

## §10.7 注记

本章是根据参考文献[18]编写的,其中的所有引理,定理10.7的充分性,定理10.9,定理10.12和推论10.10--10.11都取自该文.

本章的主要参考资料有:参考文献[18]和[28].

# 参 考 文 献

[1] Aigner, M. (1979), Combinatorial Theory, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Artin, E. (1957), Geometric Algebra, Interscience, New York.

[3] Bikhoff, G. (1967), Lattice Theory, 3rd edition, Providence: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. **25**.

[4] Chen, D. and Wan, Z. (1990), The characteristic polynomial of geometric lattice in symplectic geometry over finite fields, *Kexue Tongbao*, No. **21**, 1627—1630.

[5] Chen, D. and Wan, Z. (1993), An arrangement in orthogonal geometry over finite fields of char=2, *Acta Mathematica Sinica*, New Series, **9**, 39—47.

[6] 陈杰,(1990),格论初步,内蒙古大学出版社,呼和浩特.

[7] 戴宗铎,冯绪宁,(1965),有限几何与不完全区组设计的构作(IV)特征≠2的有限域上的正几何中的计数定理,数学学报,**15**,545—558.

[8] Dickson, L. E. (1900), Linear Groups, Teubner.

[9] Dieudonné, J. (1948), Sur les groups classiques, Hermann, Paris.

[10] 冯绪宁,戴宗铎(1965),有限几何与不完全区组设计的构作(V)特征为2的有限域上的正几何中的计数定理,数学学报,15,664—682.

[11] 华罗庚,万哲先(1963),典型群,上海科技出版社,上海.

[12] Huo, Y., Liu, Y. and Wan, Z. (1992a), Lattices generated by transitive sets of subspaces under finite classical groups I, *Communications in Algebra*, **20**, 1123—1144.

[13] Huo, Y., Liu, Y. and Wan, Z. (1992b), Lattices generated by transitive sets of subspaces under finite classical groups II, the orthogonal case of odd characteristic, *Communications in Algebra*, **20**, 2685—2727.

[14] Huo, Y., Liu, Y. and Wan, Z. (1993a), Lattices generated by transitive sets of subspaces under finite classical groups III, the orthogonal case of even characteristic, *Communications in Algebra*, **21**, 2351—2393.

[15] Huo, Y. and Wan, Z. (1993b), Lattices generated by subspaces of the same dimension and rank in orthogonal geometry over finite fields of odd characteristic, *Communications in Algebra*, **21**, 4219—4252.

[16] Huo, Y. and Wan, Z. (1994), Lattices generated by subspaces of the same dimension and rank in orthogonal geometry over finite fields of even characteristic, *Communications in Algedra*, **22**, 2015—2037.

[17] Huo, Y. and Wan, Z. (1995a), Lattices generated by transitive sets of subspaces under finite pseudo-symplectic groups, *Communications in Algebra*, **23**, 3757—

3777.

[18] Huo, Y. and Wan, Z. (1995b). Lattices generated by subspaces of the same dimension and rank in finite pseudo-symplectic space. *Communications in Algebra*, **23**, 3779-3798.

[19] Jacobson, N. (1974). Basic Algebra, I, W. H. Freeman and Company, San Francisco.

[20] Liu, Y. and Wan, Z. (1991). Pseudo-symplectic geometries over finite fields of characteristic two. *Advances in Finite Geometries and Designs*, ed. by J. W. P. Hirschfeld et al., Oxford University Press, 1991, 265—288.

[21] Orlik, P. and Solomon, L. (1983). Arrangements in unitary and orthogonal geometry over finite fields. *J. Comb. Theory, ser.* A. **38** (1985), 217—229.

[22] 万哲先(1965). 有限几何与不完全区组设计的构作(I)有限域上辛几何中的若干计数定理, 数学学报, **15**, 354—361.

[23] Wan, Z. (1991a). On the symplectic invariants of a subspace of vector space, *Acta Mathematica Scientia*, **11**, 251—253.

[24] Wan, Z. (1991b). Finite geometries and block designs, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Special Volume* **54**, Series A, 531-543.

[25] Wan, Z. (1992). On the unitary invariants of a subspace of vector space, over finite field, *Chinese Science Bulletin*, **37**, 705—707.

[26] Wan, Z. (1993a). On the orthogonal invariants of a subspace of vector space, over finite field of odd characteristic, *Linear Algebra and Applications*, **184**, 123—133.

[27] Wan, Z. (1993b). On the orthogonal invariants of a subspace of vector space, over finite field of even characteristic, *Linear Algebra and Applications*, **184**, 135—143.

[28] Wan, Z. (1993c). Geometry of Classical Groups over Finite fields, Studentlitteratur, Lund.

[29] 万哲先(1994), 二项式系数和Gauss系数, 数学通报, **10**, 0—6, **11**, 7—13.

[30] 万哲先(1995), 偏序集上的Mobius反演公式, 数学通报, **9**, 37—43, **10**, 39—43.

[31] 万哲先、阳本傅(1965), 有限几何与不完全区组设计的构作(III)有域上酉几何中若干计数定理及其应用, 数学学报, **15**, 533—544.

[32] 万哲先, 戴宗铎, 冯绪宁, 阳本傅(1966), 有限几何与不完全区组设计的一些研究, 科学出版社.

[33] Witt, E. (1937). Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **176**, 31—44.

# 索　引

### 五画



### 六画



### 七画



### 八画



### 九画



### 十画

## 十一画



## 十二画



## 十八画